

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS

69. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 16. MAI 1958)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1958

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechslungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole σ und $\mathcal{O}$, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Ulvilant. 7C. 26.

E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,

F. K. Schmidt Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

69. Band

Inhalt

3. Heft Seite

Hooley, C., On the Representation of a Number as the Sum of a Square and a Product	211
Narain, R., On a Generalized Laplace Transform	228
MacRobert, T. M., Integrals Involving E-Funktionen	234
Wittich, H., Über die Ableitung einer meromorphen Funktion mit maximaler Defektsomme	237
Baer, R., Sylowturmsgruppen	229
Jacobs, K., Konjunkturschwankungen Markoffscher n -Personen-Prozesse mit monomialer Regelung	247
Weier, J., Über Transformationen von Mannigfaltigkeiten der Dimensionsdifferenz 2	271
Lang, W.-D., Über die Äquivalenz von diskreten und kontinuierlichen Cesàro-Verfahren bei Funktionen vom Exponentialtyp	280
Zaremba, S. K., Note on the Central Limit Theorem	295

On the Representation of a Number as the Sum of a Square and a Product

By

CHRISTOPHER HOOLEY

1. Introduction

PAGE¹⁾, in a series of papers published some twenty-five years ago, derived asymptotic formulae for the number of representations of a positive integer n as the sum of r squares and t products, as $n \rightarrow \infty$, where r, t were fixed integers such that $r, t > 0$ and $2r + t \geq 4$. These formulae shewed that the number of representations could be expressed asymptotically in terms of arithmetical functions of n , these being divisor functions if $2r + t$ was even, but Dirichlet series of a Smith-Minkowski type with argument $s = \frac{1}{2}(2r + t - 1)$ if $2r + t$ was odd. As results for $r = 0^2)$ and $t = 0^3)$ had been known previously, PAGE's work left only the problem of the case $r = t = 1$ outstanding. PAGE's methods do not appear to be applicable to this problem, and no alternative method has hitherto been suggested.

It is the purpose of this paper to solve this problem, which, stated precisely, is to prove an asymptotic formula for $\kappa(n)$, the number of representations of n in the form

$$n = \lambda\mu + \nu^2,$$

where λ, μ are positive integers and ν is an integer. An equivalent interpretation of $\kappa(n)$ is as a divisor sum, since it is almost immediate that

$$\kappa(n) = \sum_{-\sqrt{n} < \nu < \sqrt{n}} d(n - \nu^2),$$

where $d(m)$ denotes the number of (positive) divisors of m . If n is not a perfect square, we shall prove a formula that corresponds to what would be obtained by formally substituting $r = t = 1$ in PAGE's general result for $2r + t$ odd. If, however, n is a perfect square, this formula no longer holds, the behaviour of $\kappa(n)$ being then quite different. In the latter case, if $n = m^2$,

¹⁾ PAGE, A.: On the representation of a number as a sum of squares and products. Proc. London Math. Soc., Ser. 2; paper I, **36**, 241—256 (1933); paper II, **36**, 471—484 (1933); paper III, **37**, 1—16 (1934).

²⁾ See, for example, INGHAM, A. E.: Some asymptotic formulae in the theory of numbers. J. London Math. Soc. **2**, 202—208 (1927). — ESTERMANN, T.: On the representations of a number as the sum of three or more products. Proc. London Math. Soc., Ser. 2, **34**, 190—195 (1932).

³⁾ This case, of course, corresponds to the classical problem of a number as a sum of squares.

then $n - v^2 = (m - v)(m + v)$, and it is not very hard to see that the problem becomes almost identical with that of the sum

$$\sum_{\mu=1}^{2m-1} d(\mu) d(2m - \mu),$$

for which a result has already been obtained by INGHAM²). Henceforth, therefore, we shall always assume that n is not a perfect square.

Problems of this type in additive number theory often group themselves into what HARDY and LITTLEWOOD termed *conjugate* pairs, and it is a common experience that a method successful with such a problem is normally applicable, with but slight modification, to the conjugate problem. It is therefore an interesting and somewhat unexpected feature of our problem, that it proves to be considerably harder than the conjugate problem of estimating the sum

$$N(x, n) = \sum_{v \leq x} d(v^2 - n),$$

where $x \rightarrow \infty$ and n is now a fixed non-zero integer. BELLMAN⁴) has in fact solved the latter problem, although he has published but a brief hint regarding the method of proof. If his suggestion be adopted, it can be shewn that

$$N(x, n) = 2x \sum_{\lambda \leq \sqrt{x}} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda} + O\left(\sqrt{x} \sum_{\lambda \leq \sqrt{x}} \frac{\varrho(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right) = N_1 + O(N_2), \quad \text{say,}$$

where $\varrho(\lambda)$ is the number of roots of the congruence $v^2 \equiv n \pmod{\lambda}$. In a parallel manner we can prove, as will be demonstrated in Section 3, that

$$\kappa(n) = 4\sqrt{n} \sum_{\lambda < \sqrt{n}} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda} + O\left(\sum_{\lambda < \sqrt{n}} \varrho(\lambda)\right) = \kappa_1 + O(\kappa_2), \quad \text{say.}$$

The problems, alike till this point, diverge in difficulty when the estimations of N_1 , N_2 , and κ_1 , κ_2 , are attempted. Whereas the estimation of N_1 and N_2 can be effected easily in a variety of ways, that of κ_1 and κ_2 is the subject to which the major part of this paper is devoted.

After expressing $\kappa(n)$ in terms of κ_1 and κ_2 , we evaluate $\varrho(\lambda)$, and thereby shew that κ_1 and κ_2 are equal to combinations of sums $A(y)$ and $B(y)$, respectively, over a set of values y not exceeding $\sqrt{n}$, where

$$A(y) = \sqrt{n} \sum_{h \leq y} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}, \quad B(y) = \sum_{h \leq y} \varrho_{d_1}(h),$$

and $\varrho_{d_1}(h)$ is a positive function of real Dirichlet characters to a (generally large) modulus that depends on n . Our treatment of $A(y)$ and $B(y)$ depends on whether y belong to a range, R_1 , of values in the neighbourhood of $\sqrt{n}$, or y belong to a range, R_2 , of smaller values. In the latter case the contribution to $\kappa(n)$ of the corresponding $A(y)$ and $B(y)$ is of a lower order of

⁴) BELLMAN, R.: Ramanujan sums and the average value of arithmetical functions. Duke Math. J. 17, 159—168 (1950).

magnitude than $\varkappa(n)$ itself. For the former case, we begin by obtaining, with the aid of the best known estimates for character sums $\sum_l \chi(l)$, an asymptotic formula of the form

$$A(x) = S(x) + O\{T(x)\},$$

where $x \rightarrow \infty$, $S(x)$ is a combination of DIRICHLET'S L -functions with argument $s=1$, and the error term holds uniformly with respect to n . This formula shews that $A(x)$ and $S(x)$ are asymptotically equivalent for $x > \sqrt{n} \log^9 n$, and also, in the special case where n has a large odd square factor, for values of x belonging to R_1 . In the general case, however, where the largest odd square factor of n is small, the error term in this formula is such that we cannot immediately deduce the asymptotic equivalence of $A(x)$ and $S(x)$ for x belonging to R_1 ; indeed, in the present state of knowledge about the L -functions, it is not even evident that $S(x)$ is positive. Although we shall not actually do so, it would be possible to consider $B(x)$ in a similar way, obtaining an asymptotic formula to which, mutatis mutandis, the above remarks would be applicable. The crux of our problem, therefore, is the estimation of $A(x)$ and $B(x)$ when $x \in R_1$ and n has no large odd square factor. In fact, in view of the results already stated as proved, it now remains to shew: (i) that $A(x) = o\{B(x)\}$ for $x \in R_1$ and all n ; (ii) that $A(x)$ and $S(x)$ are asymptotically equivalent for $x \in R_1$ and n with no large square factor (and hence $S(x) > 0$). Firstly, we use the principles of SELBERG'S sieve method (BRUN'S method would serve equally well, but would involve more complications in detail) to prove a result that includes (i) as a special case, namely, (iii) $A(x) = o\{B(x)\}$, uniformly with respect to n , as $x \rightarrow \infty$. From (iii) and the asymptotic equivalence of $A(x)$ and $S(x)$ for $x > \sqrt{n} \log^9 n$, we then deduce (ii) by a method simple in principle, but somewhat intricate in detail.

Finally, it may be of some interest to remark that this problem is essentially related to the theory of the class-number of binary quadratic forms of determinant n .

I am greatly indebted to Mr. INGHAM for reading a preliminary draft of this paper.

2. Notation

The following notation will be adopted throughout.

n, D, Ω, d , and d_1 , are positive integers such that: n is to be regarded as tending to infinity; n is not a perfect square; $n = 2^r D \Omega^2$, where r is a non-negative integer, D and Ω are odd, and D is square-free; $d^2 | n$ and $d_1 = n/d^2$; also r_1 is 0 or 1, according as r be even or odd.

$h, k, l, m, \delta, \lambda$, and μ , are positive integers; v is an integer; p is a prime; s is a continuous real variable.

(l, m) denotes the highest common factor of l and m . $p | l$, $p \nmid l$, $p^\alpha || l$, mean p divides l , p does not divide l , p^α is the highest power of p dividing l , respectively. JACOBI'S symbol of quadratic residuality is denoted by either

$\left(\frac{l}{m}\right)$ or $(l|m)$. $(l|m)$ is not defined for even m , while $(l|m)=0$ if m is odd and $(l, m)>1$.

The equation $f=O(|g|)$ denotes an inequality of the type $|f|<A|g|$, true for all values of the variables consistent with stated conditions, where A is an absolute constant.

3. Initial transformation of sum

Let $\kappa(n)$ be the number of representations of the integer n (restricted so as not to be a perfect square) in the form

$$n = \lambda\mu + \nu^2.$$

Then

$$\kappa(n) = \sum_{-\sqrt{n} < \nu < \sqrt{n}} d(n - \nu^2) = \sum_{\lambda\mu = n - \nu^2} 1.$$

Now in the right-hand sum not more than one of λ and μ can exceed $\sqrt{n}$. Therefore we have

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa(n) &= \sum_{\substack{\lambda\mu = n - \nu^2 \\ \lambda \leq \sqrt{n}}} 1 + \sum_{\substack{\lambda\mu = n - \nu^2 \\ \mu \leq \sqrt{n}}} 1 - \sum_{\substack{\lambda\mu = n - \nu^2 \\ \lambda, \mu \leq \sqrt{n}}} 1 \\ &= 2 \sum_{\substack{\lambda\mu = n - \nu^2 \\ \lambda \leq \sqrt{n}}} 1 - \sum_{\substack{\lambda\mu = n - \nu^2 \\ \lambda, \mu \leq \sqrt{n}}} 1 = 2\Sigma_1 - \Sigma_2, \quad \text{say.} \end{aligned} \right.$$

Let $\varrho(\lambda)$ denote the number of roots of the congruence

$$\nu^2 \equiv n \pmod{\lambda}.$$

Then

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \sum_{\substack{-\sqrt{n} < \nu < \sqrt{n} \\ \nu^2 \equiv n \pmod{\lambda}}} 1 = \sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \left(2\frac{\sqrt{n}}{\lambda} + O(1) \right) \varrho(\lambda) \\ &= 2\sqrt{n} \sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda} + O\left(\sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \varrho(\lambda) \right), \end{aligned} \right.$$

and

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \sum_{\substack{\sqrt{n - \lambda n^{\frac{1}{2}}} < |\nu| < \sqrt{n} \\ \nu^2 \equiv n \pmod{\lambda}}} 1 \\ &= \sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \left(2\frac{\sqrt{n - \lambda n^{\frac{1}{2}}}}{\lambda} + O(1) \right) \varrho(\lambda) = O\left(\sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \varrho(\lambda) \right). \end{aligned} \right.$$

We deduce from (1), (2) and (3)

$$(4) \quad \kappa(n) = 4\sqrt{n} \sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda} + O\left(\sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \varrho(\lambda) \right).$$

This completes the first stage of our transformation of the sum. Before we proceed to the second stage, it is necessary to investigate the series $\sum \varrho(\lambda)/\lambda^s$.

4. The series $\sum \varrho(\lambda)/\lambda^s$

Our aim in this section is to transform the series $\sum \varrho(\lambda)/\lambda^s$ by means of a principle due to EULER, in order that $\varrho(\lambda)$ may be expressed in terms of the coefficients of more familiar and manageable Dirichlet series. We remark that throughout this section each identity has two possible interpretations; firstly, as a numerical equality that is valid for all s exceeding a certain value; secondly, as a statement of coefficient relations, expressed through a theory of formal operations on Dirichlet series. The second interpretation is strictly all that is required here; under this, it is fairly plain that our identities would be true, regardless of any questions concerning the convergency or the numerical values of the series involved. Unfortunately, however, no formal theory of this type, such as is sketched by HARDY and WRIGHT⁵⁾, has ever been developed in sufficient detail, for us to insist on this second interpretation alone. We therefore observe that the absolute convergency of the series below implies the validity of the first interpretation, the second interpretation then following in virtue of a well known uniqueness theorem in the theory of Dirichlet series.

Since⁶⁾ $\varrho(\lambda) \leq \lambda$, we have that $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \varrho(\lambda)/\lambda^s$ is absolutely convergent for $s > 2$. Furthermore, we know from the elementary theory of congruences that $\varrho(\lambda)$ is a multiplicative function of λ . We thus have, for $s > 2$,

$$(5) \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\varrho(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} = \prod_{p=2}^{\infty} A_p(s), \quad \text{say.}$$

We now evaluate $A_p(s)$ separately for the five cases: (a) $p \nmid 2n$; (b) $p \mid D$, $p \nmid \Omega$; (c) $p \mid D$, $p \mid \Omega$; (d) $p \nmid D$, $p \mid \Omega$; (e) $p = 2$. We shall suppose $p^\beta \parallel n$.

Case (a). If $\alpha > 0$, it is known from the theory of quadratic congruences that $\nu^2 \equiv n \pmod{p^\alpha}$ has two or no solutions, according as to whether $(n|p)$ equals 1 or -1 . Thus, if $(n|p) = 1$, then

$$A_p(s) = 1 + \frac{2}{p^s} + \frac{2}{p^{2s}} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

while, if $(n|p) = -1$, then

$$A_p(s) = 1 = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Therefore

$$(6) \quad A_p(s) = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \left(1 - \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \sum_{\delta^2 | p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} \left(1 - \left(\frac{n|\delta^2}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

⁵⁾ *The Theory of Numbers*, third edition, Chapter XVII, 251–253.

⁶⁾ It will be evident, either from what follows or from the general theory of congruences, that the series is in fact absolutely convergent for $s > 1$. We do not require here any more than the existence of some s_0 such that the series involved are absolutely convergent for $s > s_0$.

Case (b). We have

$$\varrho(p^\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha = 0, 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The case $\alpha = 0, 1$, is trivial. If $\varrho(p^\alpha)$ were non-zero for $\alpha > 1$, the congruence $v^2 \equiv n \pmod{p^\alpha}$ would be resolvable; this would imply $p|v$; and so $p^2|n$, contrary to hypothesis. Therefore

$$(7) \quad \begin{cases} A_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \left(1 - \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ \quad = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \sum_{\delta^2|p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} \left(1 - \left(\frac{n/\delta^2}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Case (c). Here β is odd, and equals $2\beta' + 1$, say. We have

$$\varrho(p^\alpha) = \begin{cases} p^{[\frac{1}{2}\alpha]}, & \text{if } \alpha \leq \beta, \\ 0, & \text{if } \alpha > \beta. \end{cases}$$

For if $\alpha \leq \beta$, then $v^2 \equiv n \pmod{p^\alpha}$ is equivalent to $v^2 \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$; hence it is equivalent to $v \equiv 0 \pmod{p^{[\frac{1}{2}(\alpha+1)]}}$, which congruence has $p^{[\frac{1}{2}\alpha]}$ solutions, modulo p^α . If $\alpha > \beta$, then $v^2 \equiv n \pmod{p^\alpha}$ implies that $v^2 \equiv 0 \pmod{p^\beta}$; hence $v^2 \equiv 0 \pmod{p^{\beta+1}}$, since β is odd; and so $p^{\beta+1}|n$, contrary to hypothesis. Therefore

$$(8) \quad \begin{cases} A_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{p}{p^{2s}} + \frac{p}{p^{3s}} + \cdots + \frac{p^{\beta'}}{p^{(\beta-1)s}} + \frac{p^{\beta'}}{p^{\beta s}} \\ \quad = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \left(1 + \frac{p}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^{\beta'}}{p^{2\beta's}}\right) \\ \quad = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \sum_{\delta^2|p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} = \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \sum_{\delta^2|p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} \left(1 - \left(\frac{n/\delta^2}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \end{cases}$$

Case (d). Here β is even, and equals $2\beta'$, say. If $n_1 = n/p^\beta$, we have

$$\varrho(p^\alpha) = \begin{cases} p^{[\frac{1}{2}\alpha]}, & \text{if } \alpha \leq \beta, \\ 2p^{\beta'}, & \text{if } \alpha > \beta \text{ and } (n_1|p) = 1, \\ 0, & \text{if } \alpha > \beta \text{ and } (n_1|p) = -1. \end{cases}$$

If $\alpha \leq \beta$, the proof is as for the corresponding case in (c). If $\alpha > \beta$, then $v^2 \equiv n \pmod{p^\alpha}$ implies that $p^\beta|v^2$; we then obtain the equivalent congruence $v_1^2 \equiv n_1 \pmod{p^{\alpha-\beta}}$, where $v = p^{\beta'}v_1$; the latter congruence has two or no solutions, according as to whether $(n_1|p)$ equals 1 or -1; the second and third parts of the result are therefore true. Thus

$$A_p(s) = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{p}{p^{2s}} + \frac{p}{p^{3s}} + \cdots + \frac{p^{\beta'-1}}{p^{(\beta-2)s}} + \frac{p^{\beta'-1}}{p^{(\beta-1)s}} + \frac{p^{\beta'}}{p^{\beta s}} \left(1 + \frac{\varepsilon_p}{p^s} + \frac{\varepsilon_p}{p^{2s}} + \cdots\right),$$

where $\varepsilon_p = 2$ or 0 , according as to whether $(n_1|p)$ is 1 or -1 ; and so, as in case (a),

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} A_p(s) &= 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{p}{p^{2s}} + \frac{p}{p^{3s}} + \cdots + \frac{p^{\beta'-1}}{p^{(\beta-2)s}} + \frac{p^{\beta'-1}}{p^{(\beta-1)s}} + \\ &\quad + \frac{p^{\beta'}}{p^{\beta s}} \left(1 + \frac{1}{p^s} \right) \left(1 - \left(\frac{n_1}{p} \right) \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{p^s} \right) \left(1 + \frac{p}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^{\beta'-1}}{p^{(\beta-2)s}} + \frac{p^{\beta'}}{p^{\beta s}} \left\{ 1 - \left(\frac{n_1}{p} \right) \frac{1}{p^s} \right\}^{-1} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{p^s} \right) \sum_{\delta^2|p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} \left(1 - \left(\frac{n/\delta^2}{p} \right) \frac{1}{p^s} \right)^{-1}. \end{aligned} \right.$$

Case (e). If r is odd, we can shew, exactly as for case (c), that

$$\varrho(2^\alpha) = \begin{cases} 2^{\lfloor \frac{1}{2}\alpha \rfloor}, & \text{if } \alpha \leq r, \\ 0, & \text{if } \alpha > r. \end{cases}$$

If r is even and equals $2r'$, we have

$$\varrho(2^\alpha) = \begin{cases} 2^{\lfloor \frac{1}{2}\alpha \rfloor}, & \text{if } \alpha \leq r, \\ 2^{r'}, & \text{if } \alpha = r + 1, \\ 2^{r'+1}, & \text{if } \alpha = r + 2 \text{ and } D\Omega^2 \equiv 1 \pmod{4}, \\ 2^{r'+2}, & \text{if } \alpha > r + 2 \text{ and } D\Omega^2 \equiv 1 \pmod{8}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If $\alpha \leq r$, the proof is as for the corresponding case in (c). If $\alpha > r$, then from $\nu^2 \equiv n \pmod{2^\alpha}$ we deduce the equivalent congruence $\nu'^2 \equiv D\Omega^2 \pmod{2^{\alpha-r'}}$, where $\nu = 2^{r'}\nu'$; the last four parts then follow at once from a consideration of the latter congruence. We obtain

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &A_2(s) = \left(1 + \frac{1}{2^s} \right) K(s), \\ \text{where} &K(s) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^{\alpha s}}, \\ \text{and} &a_\alpha = O(2^{\frac{1}{2}\alpha}). \end{aligned} \right.$$

We deduce from (5), (6), (7), (8), (9) and (10)

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda^s} &= K(s) \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p^s} \right) \prod_{p=3}^{\infty} \left\{ \sum_{\delta^2|p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} \left(1 - \left(\frac{n/\delta^2}{p} \right) \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \right\} \\ &= \frac{K(s) \zeta(s)}{\zeta(2s)} \prod_{p=3}^{\infty} \left\{ \sum_{\delta^2|p^\beta} \frac{\delta}{\delta^{2s}} \left(1 - \left(\frac{n/\delta^2}{p} \right) \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Now, for each p in the infinite product above, let p^ν be a particular value of δ . Then the infinite product is equal to the sum of all possible terms of

the type

$$\prod_{p=3}^{\infty} \frac{p^{\gamma}}{p^{2\gamma s}} \left(1 - \left(\frac{n/p^{2\gamma}}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Therefore

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda^s} = \frac{K(s) \zeta(s)}{\zeta(2s)} \sum_{\substack{d^2|n \\ (d, 2)=1}} \frac{d}{d^{2s}} \prod_{p=3}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{n/p^{2\gamma}}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

where $p^{\gamma} || d$. Now $(n p^{-2\gamma} | p) = (n d^{-2} | p)$, since $d^2 p^{-2\gamma}$ divides n , but is prime to p . Therefore

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda^s} &= \frac{K(s) \zeta(s)}{\zeta(2s)} \sum_{\substack{d^2|n \\ (d, 2)=1}} \frac{d}{d^{2s}} \prod_{p=3}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{n/d^2}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{d_{\alpha}}{2^{\alpha s}} \sum_{\substack{d^2|n \\ (d, 2)=1}} \frac{d}{d^{2s}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h^s}, \end{aligned} \right.$$

where

$$(12) \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h^s} = \frac{\zeta(s) L_{d_1}(s)}{\zeta(2s)},$$

$$(13) \quad L_{d_1}(s) = \prod_{p=3}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{n/d^2}{p}\right) \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{\substack{l=1 \\ (l, 2)=1}}^{\infty} \left(\frac{n/d^2}{l}\right) \frac{1}{l^s},$$

and

$$(14) \quad \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mu(m)|}{m^s}.$$

Also⁷⁾, we have, by (12) and (13),

$$(15) \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h^s} = \prod_{(d_1|p) \neq -1} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \prod_{(d_1|p)=1} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

We observe that

$$(16) \quad \varrho_{d_1}(1) = 1, \quad 0 \leq \varrho_{d_1}(h) \leq d(h),$$

as is evident from (15). These simple facts will be of some importance in the sequel.

5. Final transformation of sum

To lighten the notation, it will be assumed from henceforth that d always satisfies the conditions laid down in Section 2, whether or not these be expressly stated.

⁷⁾ We adopt the convention that $p=2$ satisfies the condition $(d_1|p) \neq -1$, since $(d_1|2)$, being undefined, is certainly not equal to -1 .

By (11), we have

$$(17) \quad \sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \frac{\varrho(\lambda)}{\lambda} = \sum_{2^\alpha d^2 \leq \sqrt{n}} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \sum_{2^\alpha d^2 \leq \sqrt{n}} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \sum_{h \leq \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h};$$

and, by (12),

$$(18) \quad \sum_{\lambda \leq \sqrt{n}} \varrho(\lambda) = \sum_{2^\alpha d^2 \leq \sqrt{n}} a_\alpha d \sum_{h \leq \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \varrho_{d_1}(h).$$

Let $N = N(n) = N(n, \Omega)$ be a number which is to be defined explicitly later. Then, by (4), (10), (16), (17) and (18),

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \varkappa(n) &= 4\sqrt{n} \sum_{2^\alpha d^2 \leq N} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \sum_{h \leq \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} + O\left(\sum_{2^\alpha d^2 \leq N} a_\alpha d \sum_{h \leq \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \varrho_{d_1}(h) \right) + \\ &\quad + O\left(\sqrt{n} \sum_{N < 2^\alpha d^2 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\alpha} d} \sum_{h \leq \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \frac{d(h)}{h} \right) + O\left(\sum_{N < 2^\alpha d^2 \leq \sqrt{n}} 2^{\frac{1}{2}\alpha} d \sum_{h \leq \sqrt{n}/2^\alpha d^2} d(h) \right) \\ &= 4\sqrt{n} \sum_{2^\alpha d^2 \leq N} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \sum_{h \leq \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} + O\left(\sum_{2^\alpha d^2 \leq N} a_\alpha d \sum_{h \leq \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \varrho_{d_1}(h) \right) + \\ &\quad + O\left(\sqrt{n} \log^2 n \sum_{N < 2^\alpha d^2 \leq \sqrt{n}} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\alpha} d} \right) \\ &= 4\sqrt{n} \Sigma_3 + O(\Sigma_4) + O(\sqrt{n} \log^2 n \Sigma_5), \quad \text{say.} \end{aligned} \right.$$

Also let

$$\Sigma_{d_1} = \Sigma_{d_1, n} = \sum_{h \leq \sqrt{n}/2^\alpha d^2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}.$$

Then

$$(20) \quad \Sigma_3 = \sum_{2^\alpha d^2 \leq N} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \Sigma_{d_1}.$$

Our problem is thus reduced to one concerning the sums $\sum_{h \leq y} \varrho_{d_1}(h)/h$ and $\sum_{h \leq y} \varrho_{d_1}(h)$, for whose estimation we shall first require two lemmata on characters.

6. Lemmata on characters

LEMMA 1. If $\chi_{d_1}(l)$ is defined by the equations

$$\chi_{d_1}(l) = \begin{cases} \left(\frac{n/d^2}{l} \right), & \text{if } 2 \nmid l, \\ 0, & \text{if } 2 \mid l, \end{cases}$$

then $\chi_{d_1}(l)$ is a real character, modulo either $2D\Omega/d$, or $4D\Omega/d$, or $8D\Omega/d$, associated with (or equivalent to) a real primitive non-principal character, modulo either $2D$, or $4D$, or $8D$, respectively.

If $2 \nmid l$, we have

$$\left(\frac{n/d^2}{l} \right) = \left(\frac{2^r D(\Omega/d)^2}{l} \right) = \begin{cases} (2^{r_1} D | l); & \text{if } (l, \Omega/d) = 1, \\ 0, & \text{if } (l, \Omega/d) > 1. \end{cases}$$

Also $2^r D \neq 1$, since n is not a perfect square. Let

$$X(l) = \begin{cases} (2^r D | l), & \text{if } 2 \nmid l, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then

$$\chi_{d_1}(l) = \begin{cases} X(l), & \text{if } (l, \Omega/d) = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is apparent from DIRICHLET's derivation of his table⁸⁾ that $X(l)$ is a primitive non-principal character, modulo either $2D$, $4D$, or $8D$; the lemma is thus established.

LEMMA 2. *We have, for any positive x ,*

$$\sum_{l \leq x} \chi_{d_1}(l) = O\left(\log n \sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right).$$

We have, by an inequality due to PÓLYA⁹⁾,

$$\sum_{h \leq x} X(h) = O(\sqrt{D} \cdot \log 2D);$$

also, by Lemma 1,

$$\chi_{d_1}(l) = X(l) \sum_{m|(l, \Omega/d)} \mu(m).$$

Therefore

$$\begin{aligned} \sum_{l \leq x} \chi_{d_1}(l) &= \sum_{l \leq x} X(l) \sum_{\substack{m|l \\ m|(\Omega/d)}} \mu(m) = \sum_{\substack{m|(\Omega/d) \\ m \leq x}} \mu(m) \sum_{\substack{l \leq x \\ l \equiv 0 \pmod{m}}} X(l) \\ &= \sum_{\substack{m|(\Omega/d) \\ m \leq x}} \mu(m) \chi(m) \sum_{h \leq \frac{x}{m}} X(h) \\ &= O\left(\sum_{m|(\Omega/d)} \sqrt{D} \log 2D\right) \\ &= O(\sqrt{D} d(\Omega) \log 2D), \end{aligned}$$

from which the lemma follows, since $D \leq n\Omega^{-2}$ and $d(\Omega) \leq 2/\Omega$.

7. The sums $\sum_{h \leq x} \varrho_{d_1}(h)/h$ and $\sum_{h \leq x} \varrho_{d_1}(h)$

LEMMA 3. *If $x \geq \sqrt{n}\Omega^{-\frac{1}{2}}$, we have*

$$\sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) + O\left(\frac{n^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} \Omega^{\frac{1}{2}}} \log^2 x\right),$$

where

$$B = \frac{\gamma}{\zeta(2)} - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}.$$

⁸⁾ DIRICHLET, P. G. LEJEUNE: Vorlesungen über Zahlentheorie, S. 121.

⁹⁾ PÓLYA, G.: Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste. Göttinger Nachr. 1918, 21–29.

Firstly, for any $y \geq 1$, we have from (14)

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{m \leq y} \frac{|\mu(m)|}{m} &= \sum_{h^2 k \leq y} \frac{\mu(h)}{h^2 k} = \sum_{h \leq \sqrt{y}} \frac{\mu(h)}{h^2} \sum_{k \leq y/h^2} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{h \leq \sqrt{y}} \frac{\mu(h)}{h^2} \left\{ \log \left(\frac{y}{h^2} \right) + \gamma + O \left(\frac{h^2}{y} \right) \right\} \\ &= (\log y + \gamma) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu(h)}{h^2} - 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu(h)}{h^2} \log h + \\ &\quad + O \left\{ \sum_{h > \sqrt{y}} \frac{1}{h^2} \left[\log \left(\frac{h^2}{y} \right) + \gamma \right] \right\} + O \left\{ \frac{1}{y} \sum_{h \leq \sqrt{y}} 1 \right\} \\ &= \frac{1}{\zeta(2)} \log y + B + O \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \right). \end{aligned} \right.$$

Secondly, we have from (12) and (14)

$$(22) \quad \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \sum_{l \mid m \leq x} \chi_{d_1}(l) \frac{|\mu(m)|}{l m} = \sum_{l \leq X} + \sum_{l > X} = \Sigma_6 + \Sigma_7, \quad \text{say,}$$

where X is to be chosen later, but is such that $1 \leq X \leq x$.

Now we have

$$\Sigma_6 = \sum_{l \leq X} \chi_{d_1}(l) \sum_{m \leq x/l} \frac{|\mu(m)|}{m}.$$

Therefore, by (21),

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma_6 &= \sum_{l \leq X} \chi_{d_1}(l) \left\{ \frac{1}{\zeta(2)} \log \left(\frac{x}{l} \right) + B + O \left(\sqrt{\frac{l}{x}} \right) \right\} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi_{d_1}(l)}{l} \left\{ \frac{1}{\zeta(2)} \log \left(\frac{x}{l} \right) + B \right\} - \\ &\quad - \sum_{l > X} \frac{\chi_{d_1}(l)}{l} \left\{ \frac{1}{\zeta(2)} \log \left(\frac{x}{l} \right) + B \right\} + O \left(\sqrt{\frac{X}{x}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B \right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) + O \left(\log 2x \left| \sum_{l > X} \frac{\chi_{d_1}(l)}{l} \right| \right) \\ &\quad + O \left(\sum_{l > X} \frac{\chi_{d_1}(l)}{l} \log l \right) + O \left(\sqrt{\frac{X}{x}} \right), \end{aligned} \right.$$

the convergence of the infinite series above being known from the work of DIRICHLET himself¹⁰). Let

$$s_y = \sum_{l \leq y} \chi_{d_1}(l).$$

¹⁰) The convergence is of course easily proved by a slight modification of the ensuing argument.

Then

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{l>X} \frac{\chi_{d_1}(l)}{l} &= \sum_{l>X} \frac{1}{l} (s_l - s_{l-1}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s_m}{m+1} - \frac{s[X]}{[X+1]} + \sum_{X < l \leq m} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \right) s_l \right\} \\ &= O\left(\frac{\log x}{X} \sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right), \end{aligned} \right.$$

by Lemma 2. Similarly

$$(25) \quad \sum_{l>X} \frac{\chi_{d_1}(l)}{l} \log l = O\left(\frac{\log^2 x}{X} \sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right).$$

We deduce from (23), (24) and (25)

$$(26) \quad \Sigma_6 = \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) + O\left(\frac{\log^2 x}{X} \sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right) + O\left(\sqrt{\frac{X}{x}}\right).$$

The conditions of summation in Σ_7 imply that $m < x/X$. Therefore

$$\Sigma_7 = \sum_{m < x/X} \frac{|\mu(m)|}{m} \sum_{X < l \leq x/m} \frac{\chi_{d_1}(l)}{l}.$$

By a method similar to that used to derive (24), we can shew that the inner sum is

$$O\left(\frac{\log x}{X} \sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right).$$

Therefore

$$(27) \quad \Sigma_7 = O\left(\frac{\log x}{X} \sqrt{\frac{n}{\Omega}} \sum_{m < x/X} \frac{1}{m}\right) = O\left(\frac{\log^2 x}{X} \sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right).$$

We have now, by (22), (26) and (27),

$$\sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) + O\left(\frac{\log^2 x}{X} \sqrt{\frac{n}{\Omega}}\right) + O\left(\sqrt{\frac{X}{x}}\right).$$

If X is chosen so that

$$X^{-1} \sqrt{(n/\Omega)} = \sqrt{(X/x)},$$

then

$$X = x^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{6}} \Omega^{-\frac{1}{6}};$$

consequently

$$X/x = (\sqrt{n} \Omega^{-\frac{1}{6}} x^{-1})^{\frac{2}{3}} < 1,$$

and the condition $1 \leq X \leq x$ is satisfied. Therefore

$$\sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) + O\left(\frac{n^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}} \Omega^{\frac{1}{6}}} \log^2 x\right).$$

With a little care, it would be possible by this method to obtain a slightly improved version of Lemma 3. The resulting formula, however, would still not be sufficiently accurate to estimate Σ_{d_1} in all cases, and would not enable us to abbreviate the subsequent procedure.

LEMMA 4. If $x \geq 1$, we have

$$\sum_{h \leq x} \varrho_{d_1}(h) = O\left(\frac{x}{\log 2x} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right).$$

Let l_1 denote, generally, either 1 or numbers composed entirely of prime factors p such that $(d_1|p) = 1$; let l_2, m_1, m_2 be defined similarly, except that the condition $(d_1|p) = 1$ be replaced by $(d_1|p) \neq -1$, $(d_1|p) \neq 1$, $(d_1|p) = -1$, respectively⁷⁾. Then, by (15),

$$(28) \quad \sum_{h \leq x} \varrho_{d_1}(h) \leq \sum_{l_1 l_2 \leq x} 1 \leq \sum_{\substack{l_1 l_2 \leq x \\ l_1 \leq \sqrt{x}}} 1 + \sum_{\substack{l_1 l_2 \leq x \\ l_2 \leq \sqrt{x}}} 1 = \Sigma_8 + \Sigma_9, \quad \text{say.}$$

We have

$$\Sigma_8 = \sum_{l_1 \leq \sqrt{x}} \sum_{l_2 \leq x/l_1} 1 = \sum_{l_1 \leq \sqrt{x}} \Sigma_{l_1}, \quad \text{say.}$$

We can find an upper bound for Σ_{l_1} by SELBERG'S sieve method¹¹⁾. Any number l_2 belongs to the set of numbers that remain, after all multiples of primes p such that $(d_1|p) = -1$ have been removed from the natural numbers. Now let z be an arbitrary positive number, and λ_{m_2} a sequence such that

$$\lambda_{m_2} \text{ is } \begin{cases} 1, & \text{if } m_2 = 1, \\ \text{arbitrary,} & \text{if } 1 < m_2 \leq z, \\ 0, & \text{if } m_2 > z. \end{cases}$$

Then plainly

$$\Sigma_{l_1} \leq \sum_{h \leq x/l_1} \left(\sum_{m_2|h} \lambda_{m_2} \right)^2,$$

and, by a straightforward modification of SELBERG'S argument, we obtain the following analogue of his formula [3]¹²⁾:

$$\Sigma_{l_1} \leq \left(\frac{x}{l_1} \right) / \left(\sum_{m_2 \leq z} \frac{\mu^2(m_2)}{\varphi(m_2)} \right) + \sum_{m'_2, m''_2 \leq z} |\lambda_{m'_2} \lambda_{m''_2} R_{[m'_2, m''_2]}|,$$

where

$$R_{[m'_2, m''_2]} = O(1)$$

and

$$\lambda_{m_2} = \mu(m_2) \prod_{p|m_2} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{\substack{m''_2 \leq z/m_2 \\ (m''_2, m_2) = 1}} \frac{\mu^2(m''_2)}{\varphi(m''_2)} \right) / \left(\sum_{m'_2 \leq z} \frac{\mu^2(m'_2)}{\varphi(m'_2)} \right) \\ = O(\log \log 10 m_2).$$

¹¹⁾ SELBERG, A.: On an elementary method in the theory of primes. Det Kong. Norske Vidensk. Selsk. Forh., Trondhjem 19, No. 18 (1947).

¹²⁾ m'_2, m''_2 , etc., have the same signification as m_2 .

Hence, choosing $z = (x/l_1)^{\frac{1}{2}}$, we have

$$\begin{aligned}\Sigma_{l_1} &\leq \left(\frac{x}{l_1}\right) / \left(\sum_{m_2 \leq (x/l_1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu^2(m_2)}{\varphi(m_2)}\right) + O\left\{\left(\frac{x}{l_1}\right)^{\frac{3}{2}} (\log \log 10x)^2\right\} \\ &= O\left\{\left(\frac{x}{l_1}\right) / \left(\sum_{m_2 \leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu^2(m_2)}{\varphi(m_2)}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}\Sigma_8 &= O\left\{x \left(\sum_{l_1 \leq \sqrt{x}} \frac{1}{l_1}\right) / \left(\sum_{m_2 \leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu^2(m_2)}{m_2}\right)\right\} \\ &= O\left\{x \left(\sum_{l_1 \leq \sqrt{x}} \frac{1}{l_1} \sum_{l_2 \leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{l_2}\right) / \left(\sum_{m_2 \leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu^2(m_2)}{m_2} \sum_{l_2 \leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu^2(l_2)}{l_2}\right)\right\} \\ &= O\left\{x \left(\sum_{l_1 l_2 \leq x} \frac{1}{l_1 l_2}\right) / \left(\sum_{m \leq x^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu^2(m)}{m}\right)\right\} \\ &= O\left(\frac{x}{\log 2x} \sum_{l_1 l_2 \leq x} \frac{1}{l_1 l_2}\right).\end{aligned}$$

It is clear from (15) that

$$\sum_{l_1 l_2 \leq x} \frac{1}{l_1 l_2} \leq \zeta(2) \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h},$$

and so

$$\Sigma_8 = O\left(\frac{x}{\log 2x} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right).$$

It can be proved similarly that Σ_9 satisfies the same inequality as Σ_8 . The lemma then follows from (28).

LEMMA 5. If $\sqrt{n} \log^{-36} n \leq x \leq \sqrt{n}$, we have

$$\sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left\{1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)\right\} \left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\}.$$

Let $x_i = \sqrt{n} \log^{t_i} n$, where t_1 and t_2 are fixed numbers satisfying the inequalities $9 < t_1 < t_2 < 10$. Then, by Lemma 3,

$$(29)_i \quad \sum_{h \leq x_i} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x_i + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\} + O\left\{\frac{1}{\log n}\right\}.$$

Since from (16) the left-hand side of $(29)_2$ is at least 1, we conclude that

$$(30) \quad \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right\} \left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x_2 + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\}.$$

Also, subtracting $(29)_1$ from $(29)_2$, we have

$$(31) \quad \sum_{x_1 < h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \frac{1}{\zeta(2)} (t_2 - t_1) L_{d_1}(1) \log \log n + O\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

Now, for $x \leq y \leq x_2$, Lemma 4 gives

$$\sum_{h \leq y} \varrho_{d_1}(h) = O\left(\frac{y}{\log n} \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right),$$

from which we deduce by partial summation

$$(32) \quad \sum_{x < h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = O\left(\frac{1}{\log n} \cdot \log\left\{\frac{x_2}{x}\right\} \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right) = O\left(\frac{\log \log n}{\log n} \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right).$$

Therefore

$$(33) \quad \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left\{1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)\right\} \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h},$$

and

$$(34) \quad \sum_{h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = \left\{1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)\right\} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}.$$

We obtain from (32) and (34)

$$\sum_{x_1 < h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} \leq \sum_{x < h \leq x_2} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} = O\left(\frac{\log \log n}{\log n} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right),$$

and from this and (31)

$$(35) \quad \log \log n L_{d_1}(1) = O\left(\frac{\log \log n}{\log n} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right).$$

We have, by (30) and (33),

$$\begin{aligned} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} &= \left\{1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)\right\} \left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x_2 + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\} \\ &= \left\{1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)\right\} \left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\zeta(2)} \log\left(\frac{x_2}{x}\right) L_{d_1}(1)\right\}, \end{aligned}$$

and, by this and (35),

$$\begin{aligned} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h} &= \left\{1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right)\right\} \left\{\left(\frac{1}{\zeta(2)} \log x + B\right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1)\right\} + \\ &\quad + O\left\{\frac{\log \log n}{\log n} \sum_{h \leq x} \frac{\varrho_{d_1}(h)}{h}\right\}, \end{aligned}$$

from which the lemma follows.

8. The final theorem

We are now in a position to complete the proof of the main result. We define the number N , introduced in Section 5, by $N = Q^{\frac{1}{2}} \log^6 n$.

Since $\sqrt{n}/N > n^{\frac{1}{2}} \log^{-6} n$, we have

$$(36) \quad \Sigma_4 = O\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n} \Sigma_3\right),$$

by (19) and Lemma 4.

In order to estimate Σ_3 , it will first be shewn that

$$(37) \quad \Sigma_{d_1} = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right) \right\} \left\{ \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log \frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B \right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) \right\}.$$

We must consider two cases, distinguished by whether Ω be small or large. Suppose first that $\Omega \leq \log^{90} n$. Then the conditions of summation in Σ_4 imply that

$$\sqrt{n}/2^\alpha d^2 \geq \sqrt{n}/N = \sqrt{n} \Omega^{-\frac{1}{2}} \log^{-6} n \geq \sqrt{n} \log^{-36} n,$$

and (37) follows from Lemma 5. Suppose secondly that $\Omega > \log^{90} n$. Then we have that

$$\sqrt{n}/2^\alpha d^2 \geq \sqrt{n}/N = \sqrt{n} \Omega^{-\frac{1}{2}} \log^{-6} n = \sqrt{n} \Omega^{-\frac{1}{2}} (\Omega^{\frac{1}{2}} \log^{-6} n) > \sqrt{n} \Omega^{-\frac{1}{2}} \log^2 n,$$

and so, by Lemma 3,

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma_{d_1} &= \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log \frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B \right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) + O\left(\frac{N^{\frac{1}{2}}}{\Omega^{\frac{1}{2}}} \log^2 n\right) \\ &= \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log \frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B \right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) + O\left(\frac{1}{\log n}\right), \end{aligned} \right.$$

since $N^{\frac{1}{2}} \Omega^{-\frac{1}{2}} \log^2 n = \Omega^{-\frac{1}{2}} \log^4 n < \log^{-1} n$. Equation (37) now follows from (38), because Σ_{d_1} is at least 1.

As Σ_{d_1} is positive, we deduce from (19), (20) and (37)

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma_3 &= \left\{ 1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right) \right\} \times \\ &\times \sum_{2^\alpha d^2 \leq N} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \left\{ \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log \frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B \right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) \right\}. \end{aligned} \right.$$

But, since¹³⁾ $L_{d_1}(1) = O(\log n)$ and $L'_{d_1}(1) = O(\log^2 n)$, we have from (10)

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{2^\alpha d^2 \leq N} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \left\{ \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log \frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B \right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) \right\} \\ &= O\left(\sum_{2^\alpha d^2 > N} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\alpha d}} (\log^2 n + \alpha \log n) \right) \\ &= O\left(\sum_{d, \Omega} \frac{1}{d} \sum_{2^\alpha > N/d^2} \frac{\log^2 n + \alpha \log n}{2^{\frac{1}{2}\alpha}} \right) \\ &= O\left(\sum_{d, \Omega} \frac{1}{d} \left[\frac{d \log^2 n}{\sqrt{N}} + \frac{d \log n (1 + |\log^2(N/d^2)|)}{\sqrt{N}} \right] \right) \\ &= O\left(\frac{d(\Omega) \log^2 n}{\sqrt{N}} \right) = O\left(\frac{d(\Omega)}{\Omega^{\frac{1}{2}} \log n} \right) = O\left(\frac{1}{\log n} \right). \end{aligned} \right.$$

¹³⁾ See, for example, ESTERMANN, T.: Introduction to Modern Prime Number Theory. Cambridge Mathematical Tract, Theorems 36 and 46.

Therefore, since Σ_3 is at least 1, we have from (39) and (40)

$$(41) \quad \Sigma_3 = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right) \right\} \sum_{\substack{\alpha=0 \\ d^2 | n; (d, 2)=1}}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \left\{ \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log \frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B \right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) \right\}.$$

We have, by (19) and the argument used to derive (40),

$$\Sigma_5 = O\left(\sum_{2^\alpha d^2 > N} \frac{1}{2^{\frac{3}{2}\alpha} d} \right) = O\left(\frac{1}{\log^3 n} \right).$$

Therefore

$$(42) \quad \Sigma_5 = O\left(\frac{1}{\log^3 n} \Sigma_3 \right).$$

We deduce finally from (19), (36), (41) and (42)

$$\kappa(n) = 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \left\{ 1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right) \right\} \sum_{\substack{\alpha=0 \\ d^2 | n; (d, 2)=1}}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha d} \left\{ \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log \frac{\sqrt{n}}{2^\alpha d^2} + B \right) L_{d_1}(1) + \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) \right\}.$$

But the sum on the right-hand side of the above equation is equal to

$$\begin{aligned} \sum_{d^2 | n; (d, 2)=1} & \left[\left(\frac{d}{d^2} (\log \sqrt{n} + \gamma) \frac{1}{\zeta(2)} L_{d_1}(1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha} \right) + \left(- \frac{d \log d^2}{d^2} \frac{1}{\zeta(2)} L_{d_1}(1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha} \right) + \right. \\ & + \left(- \frac{d}{d^2} \frac{1}{\zeta(2)} L_{d_1}(1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha \log 2^\alpha}{2^\alpha} \right) + \\ & \left. + \left(- \frac{d}{d^2} \frac{2\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} L_{d_1}(1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha} \right) + \left(\frac{d}{d^2} \frac{1}{\zeta(2)} L'_{d_1}(1) \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a_\alpha}{2^\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

We have thus proved the following result.

THEOREM. For any positive integer n that is not a perfect square, let $\kappa(n)$ be the number of representations of n in the form

$$n = \lambda \mu + \nu^2,$$

or, what is equivalent, let $\kappa(n)$ be the sum

$$\sum_{-\sqrt{n} < \nu < \sqrt{n}} d(n - \nu^2).$$

Then, as $n \rightarrow \infty$, we have

$$\kappa(n) = 4 \sqrt{n} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right) \right\} \{ (\log \sqrt{n} + \gamma) f_n(1) + f'_n(1) \},$$

where

$$f_n(s) = \frac{K(s)}{\zeta(2s)} \sum_{d^2 | n; (d, 2)=1} \frac{d}{d^{2s}} L_{(n/d^2)}(s).$$

Corpus Christi College, Cambridge, England

(Eingegangen am 4. September 1957)

On a Generalized Laplace Transform

By

ROOP NARAIN

1. A generalization of the classical Laplace transform

$$(1.1) \quad \varphi(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

has been given by VARMA ([1], p. 209) in the form

$$(1.2) \quad \varphi(s) = s \int_0^{\infty} (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st) f(t) dt$$

which reduces to (1.1) on putting $k+m=\frac{1}{2}$. We denote (1.2) symbolically by

$$\varphi(s; k, m) = W[f(t); k, m]$$

and (1.1) is, as usually, denoted by

$$\varphi(s) : f(t).$$

In this paper we have established certain properties of the generalized Laplace transform which help us in obtaining integral representations of generalized Laplace transforms of some functions. The results have been obtained by utilizing the integral representations of the Whittaker function.

2. THEOREM 1. If

$$W[t^{\sigma} f(t); k, m] = \varphi(s; k, m; \sigma),$$

then

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(s; k, m; \sigma) &= \frac{s^{k+m-\lambda-\mu+1}}{\Gamma(2\lambda-2k)} \int_0^{\infty} y^{2\lambda-2k-1} (y+s)^{-1} \times \\ &\times {}_2F_1 \left\{ \begin{matrix} \lambda+\mu-k \pm m \\ 2\lambda-2k \end{matrix}; -\frac{y}{s} \right\} \varphi(y+s; \lambda, \mu; \sigma+\lambda-\mu-k+m) dy \end{aligned} \right.$$

provided¹⁾ $R(s) \geq s_0 > 0$, $R(\lambda-k) > 0$, the generalized Laplace transform of $|t^{\sigma+\lambda-\mu-k+m} f(t)|$ exists and the integral in (2.1) is absolutely convergent.

Proof. We have ([2], p. 440)

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) &= \frac{z^{\lambda-k} e^{\frac{1}{2}z}}{\Gamma(2\lambda-2k)} \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{2}zv} W_{\lambda,\mu}(zv) {}_2F_1 \left\{ \begin{matrix} \lambda-k+\mu \pm m \\ 2\lambda-2k \end{matrix}; 1-v \right\} \times \\ &\times (v-1)^{2\lambda-2k-1} v^{\mu-\frac{1}{2}} dv, \quad z \neq 0, \quad |\arg z| < \pi/2 \quad \text{and} \quad R(\lambda-k) > 0 \end{aligned}$$

¹⁾ For the sake of brevity ${}_pF_q \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \dots \\ \gamma_1 \pm \delta_1, \gamma_2 \pm \delta_2, \dots \end{matrix}; z \right\}$ has been employed to denote ${}_pF_q \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 + \beta_1, \alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_2 - \beta_2, \dots \\ \gamma_1 + \delta_1, \gamma_1 - \delta_1, \gamma_2 + \delta_2, \gamma_2 - \delta_2, \dots \end{matrix}; z \right\}$ and $\Gamma_*(\alpha \pm \beta)$ to denote $\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha - \beta)$.

Replacing z by st , substituting for $W_{k,m}(st)$ in

$$\varphi(s; k, m; \sigma) = s \int_0^{\infty} (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st) t^{\sigma} f(t) dt$$

and changing the order of integration, we have

$$\begin{aligned} \varphi(s; k, m; \sigma) &= \frac{s^{\lambda-\mu-k+m+1}}{\Gamma(2\lambda-2k)} \int_1^{\infty} (v-1)^{2\lambda-2k-1} {}_2F_1\left\{\begin{matrix} \lambda-k+\mu \pm m \\ 2\lambda-2k \end{matrix}; 1-v\right\} \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} (stv)^{\mu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}stv} W_{\lambda,\mu}(stv) t^{\sigma+\lambda-\mu-k+m} f(t) dt dv \\ &= \frac{s^{\lambda-\mu-k+m}}{\Gamma(2\lambda-2k)} \int_1^{\infty} (v-1)^{2\lambda-2k-1} {}_2F_1\left\{\begin{matrix} \lambda-k+\mu \pm m \\ 2\lambda-2k \end{matrix}; 1-v\right\} \times \\ &\quad \times \varphi(sv; \lambda, \mu; \sigma + \lambda - \mu - k + m) \frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

Putting $v=1+\frac{y}{s}$, we get the result.

Regarding the change of order of integration, we observe that the v -integral is absolutely and uniformly convergent if $R(s) \geq s_0 > 0$ and $R(\lambda-k) > 0$, the t -integral is absolutely and uniformly convergent if the generalized Laplace transform of $|t^{\sigma+\lambda-\mu-k+m} f(t)|$ exists and the absolute convergence of the repeated integral follows from that of the integral in (2.1). Hence, the change of order of integration is justified by de la Vallee Poussin's theorem ([3], p. 504).

2.1. COROLLARIES.

(i) Putting $\sigma=0$, $\lambda=k+\varrho$ and $\mu=m+\varrho$ in the theorem, the hypergeometric function ${}_2F_1$ reduces to $\left(1+\frac{y}{s}\right)^{-2\varrho-2m}$, and we have:

If $W[f(t); k, m] = \varphi(s; k, m)$, then

$$(2.2) \quad \varphi(s; k, m) = \frac{s^{2m+1}}{\Gamma(2\varrho)} \int_0^{\infty} y^{2\varrho-1} (y+s)^{-2\varrho-2m-1} \varphi(y+s; k+\varrho, m+\varrho) dy,$$

provided $R(s) \geq s_0 > 0$, $R(\varrho) > 0$, the generalized Laplace transform of $|f(t)|$ exists and the integral in (2.2) is absolutely convergent.

(ii) Putting $k+m=\frac{1}{2}$, $\lambda+\mu=\frac{1}{2}$ and $2\lambda-2k=\varrho$, the theorem reduces to a known result on Laplace transform ([4], p. 33):

If $t^{\sigma} f(t) \doteq \psi(s; \sigma)$, then

$$(2.3) \quad \psi(s; \sigma) = \frac{s}{\Gamma(\varrho)} \int_0^{\infty} \frac{y^{\varrho-1}}{y+s} \psi(y+s; \sigma+\varrho) dy,$$

provided $R(s) \geq s_0 > 0$, $R(\varrho) > 0$, the Laplace transform of $|t^{\sigma+\varrho} f(t)|$ exists and the integral in (2.3) is absolutely convergent.

2.2. EXAMPLES.

(i) Let $f(t) = {}_{p-2}F_{q-1} \left\{ \alpha_3, \dots, \alpha_p; -t \right\}$, so that ([5], p. 383)

$$\varphi(s; k, m; \sigma) = \frac{\Gamma_*(\sigma+1 \pm m \pm m)}{\Gamma(\sigma + \frac{3}{2} \pm m - k)} \cdot s^{-\sigma} {}_pF_q \left\{ \sigma+1+m \pm m, \alpha_3, \dots, \alpha_p; -\frac{1}{s} \right\},$$

$R(\sigma+1+m \pm m) > 0$, $R(s) > 0$ if $p < q+1$, with an additional condition $|s| > 1$ if $p = q+1$.

Using this in Theorem 1 and replacing $\sigma+1$ by α_1 , $\sigma+1+2m$ by α_2 , $\sigma+\frac{3}{2}+m-k$ by β_1 , $\sigma+\lambda+\mu-k+m+1$ by α'_1 and $\sigma+\lambda-\mu-k+m+1$ by α'_2 , we get

$$(2.4) \quad \left\{ {}_pF_q \left\{ \alpha_1, \dots, \alpha_p; -\frac{1}{s} \right\} = \frac{\Gamma(\alpha'_1) \Gamma(\alpha'_2) s^{\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha'}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \Gamma(\alpha'_1 + \alpha'_2 - \alpha_1 - \alpha_2)} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha'_1 + \alpha'_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - 1}}{(y+s)^{\alpha'_2}} \times \right. \\ \left. \times {}_2F_1 \left\{ \alpha'_1 - \alpha_1, \alpha'_1 - \alpha_2; -\frac{y}{s} \right\} {}_pF_q \left\{ \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p; -\frac{1}{y+s} \right\} dy, \right.$$

$R(\alpha'_2 + \alpha_2) > R(\alpha_1) > 0$, $R(\alpha'_2 + \alpha'_1) > R(\alpha_1 + \alpha_2)$, $R(\alpha_2) > 0$, $R(\alpha'_2) > 0$ and $R(s) > 0$ if $p < q+1$, with an additional condition $|s| > 1$ if $p = q+1$.

If in (2.4) we put $\alpha'_2 = \alpha_2$, it reduces to

$$(2.5) \quad \left\{ {}_pF_q \left\{ \alpha_1, \dots, \alpha_p; -\frac{1}{s} \right\} = \frac{\Gamma(\alpha'_1) s^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha'_1 - \alpha_1)} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha'_1 - \alpha_1 - 1}}{(y+s)^{\alpha'_1}} \times \right. \\ \left. \times {}_pF_q \left\{ \alpha'_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; -\frac{1}{y+s} \right\} dy, \right.$$

under similar conditions as in (2.4).

As the generalized hypergeometric function is symmetrical in the α 's, p different formulae similar to (2.5) can be obtained.

(ii) Let $f(t) = (1+t)^{-\beta}$, so that ([5], p. 384)

$$\varphi(s; k, m; \sigma) = \frac{s^{-\sigma}}{\Gamma(\beta)} E\left(\beta, \sigma+1, \sigma+1+2m; \sigma+\frac{3}{2}+m-k; s\right),$$

$$R(\sigma+1+m \pm m) > 0 \quad \text{and} \quad R(s) > 0.$$

Using this in Theorem 1 and replacing $\sigma+1$ by γ , $\sigma+1+2m$ by δ , $\sigma+\frac{3}{2}+m-k$ by ε , $\sigma+\lambda+\mu-k+m+1$ by γ' and $\sigma+\lambda-\mu-k+m+1$ by δ' , we get

$$E(\beta, \gamma, \delta; \varepsilon; s) \\ = \frac{s^{\gamma+\delta-\gamma'}}{\Gamma(\gamma'+\delta'-\gamma-\delta)} \int_0^\infty \frac{y^{\gamma'+\delta'-\gamma-\delta-1}}{(y+s)^{\delta'}} {}_2F_1 \left\{ \gamma'-\gamma, \gamma'-\delta; -\frac{y}{s} \right\} E(\beta, \gamma', \delta'; \varepsilon; y+s) dy,$$

$R(\gamma'+\delta') > R(\gamma+\delta)$, $R(\gamma'+\delta) > R(\gamma) > 0$, $R(\delta) > 0$ and $R(s) > 0$.

3. THEOREM 2. If

$$W[t^\sigma f(t); k, m] = \varphi(s; k, m; \sigma)$$

and

$$W[t^\sigma e^{y t} f(t); k, m] = \varphi(s: y: k, m; \sigma),$$

then

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(s: k, m; \sigma) &= \frac{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k + \lambda \pm \mu) s^{1+m-\lambda-\mu}}{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k \pm m) \Gamma(2\lambda)} \int_0^\infty \frac{y^{2\lambda-1}}{y+s} \times \\ &\times {}_2F_1\left\{\begin{matrix} \lambda + \mu \pm m; \\ 2\lambda \end{matrix}; -\frac{y}{s}\right\} \varphi(y+s: y: k-\lambda, \mu; \sigma + \lambda - \mu + m) dy, \end{aligned} \right.$$

provided $R(\lambda) > 0$, $R(\frac{1}{2} - k \pm m) > 0$, $R(\sigma + \lambda + 1 + \alpha + m \pm \mu) > 0$, where $f(t) = O(t^\alpha)$ for small t , $t^{\sigma+k+m-\frac{1}{2}} e^{-st} f(t)$ tends to zero as t tends to infinity for $R(s) \geq s_0 > 0$ and the integral in (3.1) is absolutely convergent.

Proof. We have ([6], p. 604)

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) &= \frac{z^\lambda e^{-\frac{1}{2}z} \Gamma_*(\frac{1}{2} - k + \lambda \pm \mu)}{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k \pm m) \Gamma(2\lambda)} \int_1^\infty e^{\frac{1}{2}zv} W_{k-\lambda, \mu}(zv) \times \\ &\times {}_2F_1\left\{\begin{matrix} \lambda + \mu \pm m; \\ 2\lambda \end{matrix}; 1-v\right\} (v-1)^{2\lambda-1} v^{\mu-\frac{1}{2}} dv, \\ z \neq 0, \quad |\arg z| < 3\frac{\pi}{2}, \quad R\left(\frac{1}{2} - k \pm m\right) > 0 \quad \text{and} \quad R(\lambda) > 0. \end{aligned}$$

Replacing in this z by st and v by $1 + \frac{y}{s}$, substituting for $W_{k,m}(st)$ in

$$\varphi(s: k, m; \sigma) = s \int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st) t^\sigma f(t) dt$$

and changing the order of integration, which can easily be seen to be permissible under the conditions stated in the theorem, we get

$$\begin{aligned} \varphi(s: k, m; \sigma) &= \frac{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k + \lambda \pm \mu) s^{1+m-\lambda-\mu}}{\Gamma_*(\frac{1}{2} - k \pm m) \Gamma(2\lambda)} \int_0^\infty y^{2\lambda-1} {}_2F_1\left\{\begin{matrix} \lambda + \mu \pm m; \\ 2\lambda \end{matrix}; -\frac{y}{s}\right\} \times \\ &\times \int_0^\infty \{(y+s)t\}^{\mu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(y+s)t} W_{k-\lambda, \mu}\{(y+s)t\} t^{\sigma+\lambda+m-\mu} e^{y t} f(t) dt dy. \end{aligned}$$

This is equivalent to (3.1).

3.1. COROLLARY. Putting $\mu = m + \lambda$, the theorem reduces to the following result:

If

$$W[f(t); k, m] = \varphi(s: k, m)$$

and

$$W[e^{y t} f(t); k, m] = \varphi(s: y: k, m),$$

then

$$(3.2) \quad \varphi(s: k, m) = \frac{s^{1+2m}}{\Gamma(2\lambda, \frac{1}{2} - k - m)} \int_0^\infty \frac{y^{2\lambda-1}}{(y+s)^{2\lambda+2m+1}} \varphi(y+s: y: k-\lambda, m+\lambda) dy,$$

provided $R(\lambda) > 0$, $R(\frac{1}{2} - k \pm m) > 0$, $R(\alpha + 1 + 2\lambda + 2m) > 0$, $R(\alpha + 1) > 0$, where $f(t) = O(t^\alpha)$ for small t , $t^{k+m-\frac{1}{2}} e^{-st} f(t)$ tends to zero as t tends to infinity

for $R(s) \geq s_0 > 0$ and the integral in (3.2) converges absolutely, $B(2\lambda, \frac{1}{2} - k + m)$ denoting the Beta-function.

4. THEOREM 3. If $W[f(t); k, m] = \varphi(s; k, m)$, then

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(s; k, m) &= \frac{2^{k+\frac{1}{2}} s^{1+m}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^\infty (u^2 - 1)^{\alpha + \beta - 1} u^{1-2\beta} \times \\ &\quad \times {}_2F_1 \left\{ \begin{matrix} \alpha \pm \frac{1}{2}m \\ \alpha + \beta \end{matrix}; 1 - u^2 \right\} g\left(\frac{1}{4} s^2 u^2\right) du, \end{aligned} \right.$$

where

$$(4.2) \quad g(x) = \int_0^\infty t^m f(t) G_{2,4}^{4,0} \left(xt^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k, \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m \end{matrix} \right) dt,$$

provided $R(s) \geq s_0 > 0$, $R(\alpha + \beta) > 0$ and the integrals in (4.1) and (4.2) are absolutely convergent.

PROOF. We have ([6], p. 602)

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) &= \frac{2^{k+\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}z}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \beta)} \int_1^\infty G_{2,4}^{4,0} \left(\frac{1}{4} z^2 u^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k, \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m \end{matrix} \right) \times \\ &\quad \times {}_2F_1 \left\{ \begin{matrix} \alpha \pm \frac{1}{2}m \\ \alpha + \beta \end{matrix}; 1 - u^2 \right\} (u^2 - 1)^{\alpha + \beta - 1} u^{1-2\beta} du, \\ z &\neq 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} \quad \text{and} \quad R(\alpha + \beta) > 0. \end{aligned}$$

Replacing z by st , substituting for $W_{k,m}(st)$ in

$$\varphi(s; k, m) = s \int_0^\infty (st)^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k,m}(st) f(t) dt$$

and changing the order of integration, which can easily be seen to be justified as in Theorem 1, we obtain the result.

4.1. COROLLARY. Putting $\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k$ and $\beta = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}k$ and using

$$G_{0,2}^{2,0}(xt^2 | \frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}m) = 2K_m(2t\sqrt{x}),$$

we obtain the following as a particular case of Theorem 3.

If $W[f(t); k, m] = \varphi(s; k, m)$, then

$$\varphi(s; k, m) = \frac{2^{k+\frac{1}{2}} s^{1+m}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1-k)} \int_1^\infty (u^2 - 1)^{-k} u^{k-\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k \pm \frac{1}{2}m \\ 1-k \end{matrix}; 1 - u^2 \right\} g\left(\frac{1}{4} s^2 u^2\right) du,$$

where

$$g(x) = 2\sqrt{x} \int_0^\infty t^{m+1} K_m(2t\sqrt{x}) f(t) dt,$$

provided $R(s) \geq s_0 > 0$, $R(1-k) > 0$ and the integrals involved are absolutely convergent.

4.2. EXAMPLE. Let in Theorem 3, $f(t) = t^{1-\nu} J_\nu(pt)$, then ([7], p. 277)

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^\infty t^{1-\nu} J_\nu(pt) G_{2,4}^{4,0} \left(xt^2 \left| \begin{matrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}k, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m \end{matrix} \right. \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p \right)^{\nu-1} G_{4,4}^{4,1} \left(\frac{4x}{p^2} \left| \begin{matrix} 0, \nu, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}k, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m \end{matrix} \right. \right), \end{aligned}$$

$$R(\alpha + 1) > 0 \quad R(\beta + 1) > 0 \quad \text{and} \quad R(3 \pm m) > 0.$$

Also ([8]),

$$\varphi(s; k, m) = \frac{(\frac{1}{2}p)^\nu \Gamma_*(2 \pm m)}{s^{1-m} \Gamma(\nu+1) \Gamma(\frac{5}{2}-k)} {}_4F_3 \left\{ \begin{matrix} 1 \pm \frac{1}{2}m, \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}m \\ \nu+1, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}k \pm \frac{1}{4} \end{matrix} ; -\frac{p^2}{s^2} \right\},$$

$$R(2 \pm m) > 0, \quad R(s) > 0 \quad \text{and} \quad |s| > |p|.$$

Hence from Theorem 3, we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (u^2 - 1)^{\alpha+\beta-1} u^{1-2\beta} {}_2F_1 \left\{ \begin{matrix} \alpha \pm \frac{1}{2}m \\ \alpha + \beta \end{matrix} ; 1 - u^2 \right\} G_{4,4}^{4,1} \left(\frac{s^2 u^2}{p^2} \left| \begin{matrix} 0, \nu, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}k, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \\ \alpha, \beta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m \end{matrix} \right. \right) du \\ = \frac{p |\pi| \Gamma_*(2 \pm m) \Gamma(\alpha + \beta)}{2^{k+\frac{3}{2}} s^2 \Gamma(\nu+1) \Gamma(\frac{5}{2}-k)} {}_4F_3 \left\{ \begin{matrix} 1 \pm \frac{1}{2}m, \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}m \\ \nu+1, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}k \pm \frac{1}{4} \end{matrix} ; -\frac{p^2}{s^2} \right\}, \end{aligned}$$

$$R(\alpha + 1) > 0, \quad R(\beta + 1) > 0, \quad R(\alpha + \beta) > 0, \quad R(2 \pm m) > 0, \quad R(s) > 0$$

and $|s| > |p|$.

References

- [1] VARMA, R. S.: On a generalization of Laplace transform. Proc. Nat. Acad. Sci. India, Sec. A **20**, 209–216 (1951). — [2] MEIJER, C. S.: Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen und ihre Produkte. I. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amster. **44**, 435–441 (1941). — [3] BROMWICH, T. J. I'a.: An introduction to the theory of infinite series. London (1931). — [4] TEWARI, N. D.: A theorem in operational calculus. Proc. Benares Math. Soc. **5**, 33–36 (1943). — [5] RATHIE, C. B.: Some properties of generalized Laplace transform. Proc. Nat. Inst. Sci. India A **21**, 382–393 (1955). — [6] MEIJER, C. S.: Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen und ihre Produkte. II. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam **44**, 599–605 (1941). — [7] NARAIN, R.: Certain properties of generalized Laplace transform involving Meijer's G -function. Math. Z. **68**, 272–281 (1957). — [8] NARAIN, R.: Certain rules of generalized Laplace transform. Ganita **8**, No. 1 (1957).

Dept. of Math. and Astr., University of Lucknow, Lucknow (India)

(Eingegangen am 24. September 1957)

Integrals Involving E -Functions

By

T. M. MACROBERT

§ 1. Introductory. An integral involving an E -function¹⁾, in which the argument of the E -function contains a factor $\lambda^{-m}(1-\lambda)^{-n}$, where λ is the variable of integration and m and n are positive integers, is evaluated in § 2. In § 3 the value of the corresponding integral, when m and n are replaced by $-m$ and $-n$, is deduced, two different forms of the integral being obtained.

The following formula will be required.

If $p \geq q+1$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; z) &= \pi^{p-q-1} \sum_{r=1}^p \prod_{s=1}^q \sin(\varrho_s - \alpha_r) \pi \prod_{i=1}^p \text{cosec}(\alpha_i - \alpha_r) \pi \times \\ &\times z^{\alpha_r} E \left\{ \alpha_r, \alpha_r - \varrho_1 + 1, \dots, \alpha_r - \varrho_q + 1; \frac{e^{\pm i\pi(p-q-1)}}{z} \right\} \\ &\quad \times E \left\{ \alpha_r - \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_r - \alpha_p + 1 \right\} \end{aligned} \right\},$$

where the dash indicates that the factor $\text{cosec}(\alpha_r - \alpha_r)\pi$ does not occur, and the asterisk that the parameter $\alpha_r - \alpha_r + 1$ is omitted.

§ 2. First Integral. The formula to be proved is

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^1 \lambda^{\alpha-1} (1-\lambda)^{\beta-1} E\{p; \alpha_r; q; \varrho_s; z \lambda^{-m} (1-\lambda)^{-n}\} d\lambda \\ = \sqrt{(2\pi)} m^{\alpha-\frac{1}{2}} n^{\beta-\frac{1}{2}} (m+n)^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta} \times \\ \times E\{p+m+n; \alpha_r; q+m+n; \varrho_s; z m^{-m} n^{-n} (m+n)^{m+n}\} \end{aligned} \right\}$$

where m and n are positive integers, $R(\alpha) > 0$, $R(\beta) > 0$; $\alpha_{p+1+v} = (\alpha + v)/m$, $v = 0, 1, 2, \dots, m-1$; $\alpha_{p+m+1+v} = (\beta + v)/n$, $v = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $\varrho_{q+1+v} = (\alpha + \beta + v)/(m+n)$, $v = 0, 1, 2, \dots, m+n-1$.

To prove this, start with the case $p=q=0$, noting that

$$(3) \quad E\{::z \lambda^{-m} (1-\lambda)^{-n}\} = \exp\{-\lambda^m (1-\lambda)^n/z\},$$

expand the exponential function in powers of $1/z$, and integrate term by term. Then the integral is equal to

$$B(\alpha, \beta) F\{\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+m+n}; \varrho_{q+1}, \dots, \varrho_{q+m+n}; -m^m n^n (m+n)^{-m-n}/z\},$$

¹⁾ An account of the E -functions will be found in the author's *Functions of a complex Variable*, 4th edition.

and, on applying the formula

$$(4) \quad \Gamma(z) = (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m} m^{z-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{m}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{m}\right) \dots \Gamma\left(\frac{z+m-1}{m}\right),$$

where m is a positive integer, it follows that the integral is equal to

$$(5) \quad \left\{ \sqrt{(2\pi)} m^{\alpha-\frac{1}{2}} n^{\beta-\frac{1}{2}} (m+n)^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta} \times \right. \\ \left. \times E\{\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+m+n}; \varrho_{q+1}, \dots, \varrho_{q+m+n}; z m^{-m} n^{-n} (m+n)^{m+n}\} \right\}.$$

Formula (2) then follows by an inductive argument.

In order to increase p by unity replace z by z/t , and then apply the formula

$$(6) \quad \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p+1-1} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; z/t) dt = E(p+1; \alpha_r; q; \varrho_s; z),$$

where $R(\alpha_{p+1}) > 0$. This restriction may, in some cases, be removed by analytical continuation.

In order to increase q by unity replace z by ζz and apply the formula

$$(6') \quad \frac{1}{2\pi i} \int e^{\zeta} \zeta^{-q+1} E(p; \alpha_r; q; \varrho_s; \zeta z) d\zeta = E(p; \alpha_r; q+1; \varrho_s; z),$$

where the contour of integration starts at $-\infty$ on the ξ -axis, passes round the origin in the positive direction and returns to $-\infty$ on the ξ -axis, the initial and final values of $\arg \zeta$ being $-\pi$ and π respectively.

These operations can be repeated an arbitrary number of times.

§ 3. Second Integral. From formula (2) the following result can be derived.

If $p \geq q+1$, and if $R(\alpha + m\alpha_r) > 0$, $R(\beta + n\alpha_r) > 0$, $r = 1, 2, \dots, p$, where m and n are positive integers,

$$(7) \quad \left\{ \int_0^1 \lambda^{\alpha-1} (1-\lambda)^{\beta-1} E\{p; \alpha_r; q; \varrho_s; z \lambda^m (1-\lambda)^n\} d\lambda \right. \\ = \pi^{p-q-1} \sqrt{(2\pi)} m^{\alpha-\frac{1}{2}} n^{\beta-\frac{1}{2}} (m+n)^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta} \times \\ \times \sum_{r=1}^p \prod_{s=1}^q \sin(\varrho_s - \alpha_r) \pi \prod_{t=1}^p \text{cosec}(\alpha_t - \alpha_r) \pi m^{m\alpha_r} n^{n\alpha_r} (m+n)^{-(m+n)\alpha_r} \times \\ \left. \times z^{\alpha_r} E\left\{ \begin{matrix} \alpha_r, \alpha_r - \varrho_1 + 1, \dots, \alpha_r - \varrho_q + 1, \beta_1, \dots, \beta_{m-n} \\ \alpha_r - \alpha_1 + 1, \dots, \alpha_r - \alpha_p + 1, \sigma_1, \dots, \sigma_{m+n} \end{matrix} \right\} \cdot \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n z} e^{\pm i\pi(p-q-1)} \right\},$$

where

$$\begin{aligned} \beta_{1+v} &= \alpha_r + (\alpha + v)/m, & v &= 0, 1, 2, \dots, m-1, \\ \beta_{m+1+v} &= \alpha_r + (\beta + v)/n, & v &= 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ \sigma_{1+v} &= \alpha_r + (\alpha + \beta + v)/(m+n), & v &= 0, 1, 2, \dots, m+n-1. \end{aligned}$$

To prove this, substitute on the left from formula (1) and then apply formula (2).

The following is an alternative form for the value of the integral.

Subject to the same restrictions as in (7),

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 \lambda^{\alpha-1} (1-\lambda)^{\beta-1} E\{p; \alpha_r; q; \varrho_s; z \lambda^m (1-\lambda)^n\} d\lambda \\ &= \sqrt{(2\pi)} m^{\alpha-\frac{1}{2}} n^{\beta-\frac{1}{2}} (m+n)^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta} \times \\ & \times \left[\frac{\sin(\alpha+\beta)\pi}{2\sin\alpha\pi\sin\beta\pi} E \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1, \dots, \alpha_p, 1-(\alpha+\beta)/(m+n), \dots, \\ 1-(\alpha+\beta+m+n-1)/(m+n); \frac{m^m n^n z}{(m+n)^{m+n}} \\ \varrho_1, \dots, \varrho_q, 1-\alpha/m, \dots, \\ 1-(\alpha+m-1)/m, 1-\beta/n, \dots, 1-(\beta+n-1)/n \end{array} \right\} - \right. \\ & \quad - \sum_{(m, \alpha), (n, \beta)}^{m-1} \frac{1}{2m} \operatorname{cosec} \left(\frac{\alpha+\mu}{m} \right) \pi \left\{ \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n z} \right\}^{(\alpha+\mu)/m} \times \\ & \quad \times E \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + (\alpha+\mu)/m, \dots, \alpha_p + (\alpha+\mu)/m, \mu\beta_1, \dots, \mu\beta_{m+n}; \frac{m^m n^n z}{(m+n)^{m+n}} \\ 1 + (\alpha+\mu)/m, \varrho_1 + (\alpha+\mu)/m, \dots, \varrho_q + (\alpha+\mu)/m, \mu\sigma_1, \dots, \mu\sigma_{m+n-1} \end{array} \right\} \end{aligned} \right\},$$

where

$$\mu\beta_{1+v} = 1 + (\alpha+\mu)/m - (\alpha+\beta+v)/(m+n), \quad v=0, 1, 2, \dots, m+n-1;$$

$$\mu\sigma_1, \mu\sigma_2, \dots, \mu\sigma_{m-1}$$

are

$$1 + \mu/m, 1 + (\mu-1)/m, \dots, 1 + 1/m, 1 - 1/m, \dots, 1 - (m-\mu-1)/m$$

respectively, and

$$\mu\sigma_{m+v} = 1 + (\alpha+\mu)/m - (\beta+v)/n, \quad v=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

To prove this, take the case $p=1, q=0$ of (7), apply (1) and the formulae

$$(9) \quad \prod_{r=0}^{m-1} \sin(\varphi + r\pi/m) = 2^{1-m} \sin m\varphi,$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sin\left(\frac{t}{m}\pi\right) \sin\left(\frac{t-1}{m}\pi\right) \dots \sin\left(\frac{1}{m}\pi\right) \sin\left(\frac{1}{m}\pi\right) \sin\left(\frac{2}{m}\pi\right) \dots \\ & \dots \sin\left(\frac{m-t-1}{m}\pi\right) = 2^{1-m} m, \end{aligned} \right.$$

where $t=1, 2, \dots, m-2$, to the expression on the right, and then generalise by the inductive argument described in § 2.

These methods are applicable to a wide class of integrals.

The University, Glasgow, Scotland

(Eingegangen am 9. Oktober 1957)

Über die Ableitung einer meromorphen Funktion mit maximaler Defektsumme

Von
HANS WITTICH

Diese Note enthält eine ergänzende Bemerkung zu einem kürzlich von S. M. SHAH und S. K. SINGH [1] veröffentlichten Satz. Er berührt sich mit Ergebnissen, die E. ULRICH [2] aus der Hauptungleichung der Wertverteilungstheorie abgeleitet hat. Hier soll gezeigt werden, daß auch der Satz von SHAH und SINGH aus der Hauptungleichung gewonnen werden kann, und zwar sogar unter schwächeren Voraussetzungen; er gilt nämlich für alle in $|z| < R \leq \infty$ meromorphen Funktionen $w(z)$, für welche das Restglied in der Hauptungleichung unwesentlich ist. Das ist der Fall, wenn

$$\lim_{r \rightarrow R} \frac{-\log(R-r)}{T(r, w)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{T(r, w)} = 0$$

gilt. Von der unten formulierten Teilbehauptung (1') abgesehen, sind Annahmen über die Ordnung der betrachteten Funktionen entbehrlich.

Wir verwenden die Bezeichnungen von [3]. Aus der Hauptungleichung

$$(H) \quad N(r, 1/w') + \sum_{j=1}^q m(r, a_j) + S(r) \leq T(r, w') \leq N(r, w') + m(r, w) + S_1(r)$$

folgt mit $\Delta(w', 0) = 1 - \lim_{r \rightarrow R} \frac{N(r, 1/w')}{T(r, w')} \leq 1$, wenn in dem linken Teil zum $\lim_{r \rightarrow R}$ übergegangen wird:

$$(1) \quad \lim_{r \rightarrow R} \frac{T(r, w')}{T(r, w)} \geq \Delta(w', 0) \lim_{r \rightarrow R} \frac{T(r, w')}{T(r, w)} \geq \sum_{a \neq \infty} \delta(w, a).$$

Treten in (H) keine Ausnahmestrecken Δ_r auf, was z.B. für Funktionen von endlicher Ordnung der Fall ist, dann kann der $\lim_{r \rightarrow R}$ gebildet werden. Man erhält

$$(1 - \delta(w', 0)) \lim_{r \rightarrow R} \frac{T(r, w')}{T(r, w)} + \sum_{a \neq \infty} \delta(w, a) \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow R} \frac{T(r, w')}{T(r, w)}.$$

Daraus folgt in Verbindung mit (1) und wegen

$$(2) \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow R} \frac{T(r, w')}{T(r, w)} \leq 2 - \Theta(w, \infty) \leq 2 - \delta(w, \infty) - \vartheta(w, \infty) \leq 2$$

die Beziehung

$$(1') \quad (1 + \Delta(w', 0) - \delta(w', 0)) \cdot \sum_{a \neq \infty} \delta(w, a) \leq \Delta(w', 0) (2 - \delta(w, \infty) - \vartheta(w, \infty)).$$

Aus $\sum_{a \neq \infty} \delta(w, a) = 2$ folgt nach (1) und (2)

$$\lim_{r \rightarrow R} \frac{T(r, w')}{T(r, w)} = 2, \quad \delta(w, \infty) = \vartheta(w, \infty) = \Theta(w, \infty) = 0.$$

$\Delta(w, \infty) = 0$ ergibt sich aus der Defektrelation $\sum \delta(w, a) + \Delta(w, \infty) \leq 2$. Die von E. ULLRICH aus (H) abgeleiteten Beziehungen $a \neq \infty$

$$\sum_{a \neq \infty} \delta(w, a) \leq (2 - \Theta(w, \infty)) \delta(w', 0) \quad \text{und} \quad (2 - \Theta(w, \infty)) \delta(w', \infty) \leq \Delta(w, \infty)$$

liefern im Falle $\sum_{a \neq \infty} \delta(w, a) = 2$

$$\delta(w', 0) = 1 \quad \text{und} \quad \delta(w', \infty) = 0.$$

Wird (H) für $w'(z)$ angeschrieben und $N(r, w'') + m(r, w') - N(r, 1/w'') = T(r, w') + \bar{N}(r, w) - N(r, 1/w'')$ beachtet, dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{b \neq \infty} \delta(w', b) &\leq 1 + \lim_{r \rightarrow R} \frac{\bar{N}(r, w)}{T(r, w)} \cdot \frac{T(r, w)}{T(r, w')} - \lim_{r \rightarrow R} \frac{N(r, 1/w'')}{T(r, w')} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} (1 - \Theta(w, \infty)) - \Phi_e(w') = \frac{3}{2} - \Phi_e(w') \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

oder wegen $\delta(w', 0) = 1$

$$(3) \quad \sum_{b \neq 0, \infty} \delta(w', b) \leq \frac{1}{2} - \Phi_e(w') \leq \frac{1}{2}.$$

$\Phi_e(w') = \lim_{r \rightarrow R} \frac{N(r, 1/w'')}{T(r, w')}$ ist der Gesamtindex der algebraischen Verzweichtigkeit von $w'(z)$ im Endlichen. Danach gilt der

Satz. Für jede in $|z| < R \leq \infty$ eindeutige analytische Funktion, deren Charakteristik der Bedingung $\lim_{r \rightarrow R} \frac{-\log(R-r)}{T(r, w)} = 0$ bzw. $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log r}{T(r, w)} = 0$ genügt, gilt die Beziehung (1). Treten in (H) keine Ausnahmeverintervalle auf, dann gilt auch noch (1').

Aus der Annahme $\sum_{a \neq \infty} \delta(w, a) = 2$ folgt

$$\lim_{r \rightarrow R} \frac{T(r, w')}{T(r, w)} = 2, \quad \delta(w', 0) = 1, \quad \delta(w', \infty) = 0$$

und

$$\sum_{b \neq 0, \infty} \delta(w', b) \leq \frac{1}{2} - \Phi_e(w') \leq \frac{1}{2}.$$

In $|z| < \infty$ meromorphe Funktionen mit der Defektverteilung $\sum_{j=1}^q \delta(w, a_j) = 2$ liefern die Flächen mit endlich vielen logarithmischen Enden, während für Flächen mit mindestens einem periodischen Ende $\sum_{j=1}^q \delta(w, a_j) < 2$ gilt.

Literatur

- [1] SHAH, S. M., u. S. K. SINGH: On the derivative of a meromorphic function with maximum defect. Math. Z. 65, 171–174 (1956). — [2] ULLRICH, E.: Über die Ableitung einer meromorphen Funktion. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1929. — [3] Wegen der Bezeichnungen vgl. man WITTICH, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Ergeb. d. Math., N. F. 1955, H. 8, Springer-Verlag.

Karlsruhe, Technische Hochschule, II. Lehrstuhl für Mathematik

(Eingegangen am 23. Oktober 1957)

Sylowturmgruppen

OTTO GRÜN zum 70. Geburtstag am 26. Juni 1958 gewidmet

Von

REINHOLD BAER

Unter einer Sylowturmgruppe wollen wir eine endliche Gruppe G mit der folgenden Eigenschaft verstehen:

(ST) *Jede von 1 verschiedene Faktorgruppe von G besitzt eine von 1 verschiedene Sylowuntergruppe, die Normalteiler ist.*

Es ist klar, daß jede Sylowturmgruppe einen Sylowturm besitzt; d.h. es gibt eine aufsteigende Folge von Normalteilern $S(i)$ der Gruppe G derart, daß $1 = S(0)$, $S(i), S(i+1)$ ist die p_i -Sylowuntergruppe von $G/S(i)$, $S(k) = G$ gilt. [Einen solchen Sylowturm hat PH. HALL, p. 287 als Sylow series of complexions $p_1, \dots, p_h$ bezeichnet.] Dann ist aber $S(i)$ genau die Menge der Elemente g aus G , deren Ordnung $o(g)$ nur durch Primzahlen aus der Folge $p_1, \dots, p_i$ teilbar ist. Jedes $S(i)$ ist also eine charakteristische Untergruppe von G ; und nun sieht man leicht ein, daß die obige Eigenschaft (ST) äquivalent mit der Existenz eines Sylowturms ist.

Daß Unter- und Faktorgruppen von Sylowturmgruppen wieder Sylowturmgruppen sind, sieht man sofort ein; dagegen werden direkte Produkte von Sylowturmgruppen im allgemeinen nicht wieder Sylowturmgruppen sein, wie man durch leicht zu konstruierende Beispiele belegt. Die sich hierin aufzeichnende Schwierigkeit hat natürlich ihren Grund darin, daß eine Sylowturmgruppe Sylowtürme von wesentlich verschiedenem Typ besitzen kann — man denke etwa an nilpotente Gruppen — und es wird unsere Hauptaufgabe sein, in irgendeiner Form die Gesamtheit dieser Sylowtürme zu erfassen.

BEZEICHNUNGEN:

$o(G)$ = Ordnung von G .

$o(g)$ = Ordnung des Gruppenelements g .

r -Gruppe = Gruppe, deren Ordnung nur durch Primzahlen aus der Primzahlmenge r teilbar ist.

r -Element = Element aus einer r -Gruppe = Element, dessen Ordnung nur durch Primzahlen aus der Primzahlmenge r teilbar ist.

G_r = Menge der r -Elemente aus der Gruppe G .

$c(G)$ = Charakteristik von G = Menge der Primteiler von $o(G)$.

Hallsche Untergruppe = Untergruppe, deren Ordnung zu ihrem Index teilerfremd ist.

; Alle betrachteten Gruppen sind *endlich*.

DEFINITION 1. Die Primzahl p ist in der Gruppe G stärker als die Primzahl $q \neq p$, wenn Elemente aus G in einer q -Untergruppe von G Automorphismen der Ordnung p induzieren.

Dieser Sachverhalt liegt also dann und nur dann vor, wenn es eine q -Untergruppe Q von G und ein Element g aus dem Normalisator von Q in G gibt, das in Q einen Automorphismus der Ordnung p induziert. Dann ist aber $g = g'g''$, wo g' und g'' Potenzen von g sind, $o(g'')$ zu p teilerfremd und g' ein p -Element ist. Da aber g und g' denselben Automorphismus in Q induzieren, so gibt es sogar p -Elemente, die in q -Untergruppen Automorphismen der Ordnung p induzieren. Weiter sei bemerkt, daß $\{Q, g'\} = Q\{g'\}$ eine auflösbare Untergruppe der Charakteristik p, q ist.

Diese Stärkerbeziehung wird eine fundamentale Rolle in unseren Betrachtungen spielen. Ist die Primzahl p in der Gruppe G stärker als q , so sind p und q zwei verschiedene Primteiler von $o(G)$. Es kann durchaus passieren, wie einfachste Beispiele zeigen, daß in der Gruppe gleichzeitig p stärker als q und q stärker als p ist; und wir können natürlich auch nicht mit Transitivität der Stärkerbeziehung rechnen.

LEMMA. Sind p und q verschiedene Primteiler von $o(G)$, so ist die Anzahl der p -Sylowuntergruppen von G dann und nur dann zu q teilerfremd, wenn es eine Hallische Untergruppe H der Charakteristik p, q in G gibt, in der p nicht stärker ist als q .

BEWEIS. Es sei zunächst die Anzahl der p -Sylowuntergruppen von G zu q teilerfremd. Dann betrachten wir eine p -Sylowuntergruppe P von G und den Normalisator N von P in G . Unsere Voraussetzung ist dann nach den Sylowschen Sätzen mit der Teilerfremdheit von q und $[G:N]$ äquivalent; und dieses ist äquivalent mit der Tatsache, daß jede q -Sylowuntergruppe Q von N auch eine q -Sylowuntergruppe von G ist. Da P ein Normalteiler von N ist, so ist $H = PQ$ eine Hallische Untergruppe der Charakteristik p, q von N und von G ; und die Untergruppen $1, P, H$ bilden einen Sylowturm von H . Wäre nun p in H stärker als q , so gäbe es ein p -Element w in H , das in einer q -Untergruppe W von H einen Automorphismus der Ordnung p induzierte. Dann liegt aber w in der charakteristischen Untergruppe P von H ; und jeder Kommutator $x^{-1}w^{-1}xw$ mit x aus W liegt in $P \cap W = 1$. Also würde w mit jedem Element aus W vertauschbar sein, den Automorphismus 1 induzieren, der die Ordnung $1 \neq p$ hat. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, daß p in H nicht stärker als q ist, womit die Notwendigkeit unserer Bedingung bewiesen ist.

Wir nehmen umgekehrt die Existenz einer Hallischen Untergruppe H der Charakteristik p, q an, in der p nicht stärker als q ist. Wir bilden zunächst das Produkt P aller p -Normalteiler von H . Dann ist P selbst ein p -Normalteiler von H . Weiter bilden wir das Produkt Q/P aller q -Normalteiler von H/P . Dann ist Q/P ebenfalls ein q -Normalteiler von H/P ; und P und Q sind charakteristische Untergruppen von H . Wäre nun $Q \neq H$, so existierte ein minimaler Normalteiler M/Q von H/Q . Da die Ordnung von H nur durch die zwei Primzahlen p und q teilbar ist, so ist auch die Ordnung von M/Q nur

durch diese Primzahlen teilbar. Anwendung eines berühmten Burnsidischen Satzes ergibt die Auflösbarkeit von M/Q . Auflösbare minimale Normalteiler sind aber elementare abelsche Gruppen von Primzahlpotenzordnung; siehe etwa BAER [I; p. 118, Lemma 1]. Aus der Definition von Q folgt sofort, daß M/Q keine q -Gruppe sein kann. Also ist M/Q eine p -Gruppe. Sei S eine p -Sylowuntergruppe von M . Da M/Q eine p -Gruppe ist, so ist $M = QS$; und da P eine charakteristische p -Untergruppe von H und M ist, so ist $P \leq S$. Weiter sei U eine q -Sylowuntergruppe von Q . Da Q/P eine q -Gruppe ist, so ist $Q = PU$. Schließlich sei V der Zentralisator von U in S , d. h. die Gesamtheit der Elemente v aus S , die mit jedem Element aus U vertauschbar sind. Ist s irgendein Element aus S , so ist $s^{-1}Us$ eine q -Sylowuntergruppe von Q , da ja U eine q -Sylowuntergruppe des Normalteilers Q von M ist. Also gibt es U in $s^{-1}Us$ transformierende Elemente in $Q = PU$; und daraus folgt sogar die Existenz eines $t^{-1}Ut = s^{-1}Us$ erfüllenden Elements t in $P \leq S$. Mit t und s gehört aber auch st^{-1} zu S . Das p -Element st^{-1} liegt also im Normalisator der q -Untergruppe U . Es induziert in U einen Automorphismus der Ordnung p^n . Wäre $0 < n$, so induzierte $(st^{-1})^{p^{n-1}}$ in der q -Untergruppe U von H einen Automorphismus der Ordnung p , so daß p in H stärker wäre als q . Dies widerspricht unseren Voraussetzungen über H . Also ist $n = 0$, so daß st^{-1} dem Zentralisator V von U in S angehört. Damit haben wir gezeigt, daß $S = PV$ ist. Da U natürlich dem Normalisator der charakteristischen Untergruppe P von H angehört und sogar im Zentralisator von V liegt, so ist U im Normalisator von S enthalten. Aus $M = QS = UPS = US$ ergibt sich dann, daß S ein Normalteiler von M ist. Eine p -Sylowuntergruppe, die Normalteiler ist, ist eine charakteristische Untergruppe. Als charakteristische Untergruppe des Normalteilers M von H ist S ein p -Normalteiler von H . Nach Definition von P ist also S in P enthalten, so daß sogar $S = P$ und $M = QS = QP = Q \neq M$ wird. Dies ist ein Widerspruch, aus dem wir $Q = H$ folgern. Also ist P ein p -Normalteiler von H mit q -Faktorgruppe $Q/P = H/P$, so daß P sogar eine p -Sylowuntergruppe von H ist. Da H eine Hallsche Untergruppe von G ist, so ist P eine p -Sylowuntergruppe von G ; und jede q -Sylowuntergruppe von H ist eine q -Sylowuntergruppe von G , die im Normalisator N von P liegt. Es folgt, daß $[G:N]$ zu q teilerfremd ist. Da alle p -Sylowuntergruppen von G zueinander konjugiert sind, so ist $[G:N]$ die Anzahl der p -Sylowuntergruppen von G ; und diese ist also zu q teilerfremd, wie wir beweisen wollten.

BEMERKUNG 1. PH. HALL, p. 287 hat auf das Beispiel der einfachen Gruppe L der Ordnung $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ hingewiesen, die zwei wesentlich verschiedene Hallsche Untergruppen der Charakteristik 2, 3 enthält. Die eine dieser Hallschen Untergruppen besitzt einen 2-Normalteiler vom Index 3, so daß die Zahl der 2-Sylowuntergruppen zu 3 teilerfremd ist, während in der anderen dieser Hallschen Untergruppen 2 stärker ist als 3.

Es erweist sich als zweckmäßig, die Frage nach der Existenz von Sylowtürmen in einen etwas allgemeineren Rahmen zu stellen. Es sei σ eine Halbordnung einer Menge r von Primzahlen, so daß nie $p\sigma p$ gelte und aus $a\sigma b$,

$b\sigma c$ immer $a\sigma c$ folge. Unter einem σ -Schweif ist dann eine Menge von Primzahlen aus r zu verstehen, die mit p auch alle $x\sigma p$ erfüllenden Primzahlen x aus r enthält.

DEFINITION 2. Ist σ eine Halbordnung der Primzahlmenge r , ist G eine r -Gruppe, und ist für jeden σ -Schweif $\mathfrak{s}$ die Menge $G_{\mathfrak{s}}$ aller $\mathfrak{s}$ -Elemente aus G eine charakteristische $\mathfrak{s}$ -Untergruppe von G , so werde G als σ -verstreute Gruppe bezeichnet.

Für eine ausführliche Diskussion dieser Gruppenklasse vgl. BAER [I; p. 164/165], wo wir diese Gruppen σ -dispersed genannt haben. Wir erwähnen, daß Untergruppen, Faktorgruppen und direkte Produkte σ -verstreuter Gruppen wieder σ -verstreut sind. Ist G eine σ -verstreute Gruppe, so ist $c(G) \leq r$; und wir hätten uns o.B.d.A. auf Halbordnungen der Charakteristik beschränken können. Dies hätte aber den Nachteil gehabt, daß wir beim Übergang zu Unter- oder Faktorgruppen den Definitionsbereich der Halbordnung hätten ändern müssen.

Dann und nur dann ist G eine Sylowturmgruppe, wenn G eine σ -verstreute Gruppe für eine geeignete Halbordnung σ von $c(G)$ ist.

BEWEIS. Ist nämlich $S(i)$ ein Sylowturm von G mit $c[S(i)/S(i-1)] = p_i$, so bewirkt diese Indizierung der Primteiler von $o(G)$ eine [lineare] Ordnung σ von $c(G)$, für die G offenbar eine σ -verstreute Gruppe ist. — Ist umgekehrt σ eine Halbordnung von $c(G)$, für die G eine σ -verstreute Gruppe ist, so kann man wegen der Endlichkeit der Menge $c(G)$ der Primteiler von $o(G)$ diese [auf mancherlei Art] so anordnen: $c(G) = [p_1, \dots, p_k]$, daß $i < j$ aus $p_i \sigma p_j$ [aber nicht notwendig umgekehrt] folgt. Setzen wir dann $\mathfrak{s}(i) = [p_1, \dots, p_i]$, so ist jedes $\mathfrak{s}(i)$ ein σ -Schweif von $c(G)$. Aus der σ -Verstreutheit von G ergibt sich also, daß jedes $G_{\mathfrak{s}(i)}$ eine charakteristische $\mathfrak{s}(i)$ -Untergruppe von G ist, und daß diese charakteristischen Untergruppen einen Sylowturm

$$1 = G_{\mathfrak{s}(0)} < \dots < G_{\mathfrak{s}(i)} < \dots < G_{\mathfrak{s}(k)} = G$$

bilden.

Eine Sylowturmgruppe besitzt im allgemeinen Sylowtürme sehr verschiedenen Typs, wie aus den vorhergehenden Betrachtungen zu entnehmen ist. Wir werden aber zeigen, daß es für solche Gruppen eine ausgezeichnete Halbordnung von $c(G)$ gibt.

DEFINITION 3. Sind p, q [gleiche oder verschiedene] Primteiler von $o(G)$, so gilt dann und nur dann pGq , wenn es

$$p = p_0, p_{i+1} \text{ ist } G\text{-stärker als } p_i, p_i = q$$

erfüllende Primteiler p_i von $o(G)$ gibt.

Diese von der Gruppe G in ihrer Charakteristik $c(G)$ definierte Beziehung wollen wir auch als *Bewertung* von $c(G)$ bezeichnen. Sie ist stets transitiv [per definitionem]; und sie ist also dann und nur dann eine Halbordnung, wenn pGp für kein p aus $c(G)$ gilt.

SATZ 1. *Dann und nur dann ist G eine Sylowturmgruppe, wenn die Bewertung von $c(G)$ eine Halbordnung ist.*

BEWEIS der Notwendigkeit der Bedingung. Es sei $S(i)$ ein Sylowturm der Gruppe G mit $1 = S(0)$, $p_i = c[S(i)/S(i-1)]$, $S(k) = G$. Wäre p_i zwar G -stärker als p_j , aber $i < j$, so würde $S(i)$ kein p_j -Element, aber alle p_i -Elemente enthalten; und es würde eine p_i -Untergruppe J geben, in der ein p_i -Element g einen Automorphismus der Ordnung p_i induzierte. Da g im Normalisator von J und in der charakteristischen Untergruppe $S(i)$ liegt, so gehört für jedes x aus J der Kommutator $g^{-1}x^{-1}gx$ zu $J \cap S(i) = 1$. Also ist g mit jedem Element aus J vertauschbar und induziert folglich in J den Automorphismus 1 der Ordnung $1 \neq p_i$. Dies ist ein Widerspruch; und wir haben gezeigt:

ist $i < j$, so ist p_i nicht G -stärker als p_j .

Aus $p_i G p_j$ folgt also $i < j$, so daß insbesondere nie $p G p$ gelten kann: die Bewertung von $c(G)$ ist eine Halbordnung.

Da wir Verstreutheit und die Existenz von Sylowtürmen als äquivalente Eigenschaften nachgewiesen haben, so ergibt sich das Hinreichen unserer Bedingung aus dem folgenden schärferen

ERGÄNZUNGSSATZ. *Ist die Bewertung von $c(G)$ eine Halbordnung, so ist G eine G -verstreute Gruppe.*

BEWEIS. Da wir die Verstreutheit der Untergruppen nachweisen wollen, so ist es zweckmäßig, $c(G) = r$ zu setzen und unter σ die von der Bewertung von $c(G)$ in r definierte Halbordnung zu verstehen. Wäre G nicht σ -verstreut, so gäbe es unter den Untergruppen von G eine kleinste, nicht σ -verstreute Untergruppe K . Dann ist jede echte Untergruppe von K eine σ -verstreute Gruppe; und daraus folgt die Auflösbarkeit von K ; s. BAER [I; p. 172, Corollary 1].

Es sei p ein σ -minimaler Primteiler von $o(K)$ [so daß $q \sigma p$ für keinen Primteiler q von $o(K)$ gilt]. Solche σ -minimalen Primteiler von $o(K)$ gibt es, da $c(K)$ endlich und wegen $K \neq 1$ nicht leer ist. Es sei q ein von p verschiedener Primteiler von $o(K)$. Aus der Auflösbarkeit von K und den Hallschen Sätzen folgt die Existenz einer Hallschen Untergruppe H der Charakteristik p, q von K ; s. etwa ZASSENHAUS, p. 127, Aufgaben. Aus der Ungültigkeit von $q \sigma p$ folgt auch die von $q G p$, so daß insbesondere p nicht G -stärker als q ist. A fortiori ist p nicht H -stärker als q . Anwendung des Lemmas zeigt, daß die Anzahl der p -Sylowuntergruppen von K zu q teilerfremd ist. Ist also P eine p -Sylowuntergruppe von K und P^* der Normalisator von P in K , so ist $[K:P^*]$ zu jedem Primteiler von $o(K)$ teilerfremd. Folglich ist $P^* = K$ und P ein Normalteiler von K .

Sei nun $\mathfrak{s}$ ein σ -Schweif von r . Ist $\mathfrak{s} \cap c(K)$ leer, so ist $K_{\mathfrak{s}} = 1$ die Gesamtheit der $\mathfrak{s}$ -Elemente aus K . Ist aber $\mathfrak{s} \cap c(K)$ nicht leer, so gibt es in $\mathfrak{s} \cap c(K)$ eine σ -minimale Primzahl p . Da $\mathfrak{s}$ ein σ -Schweif ist, so ist p ein σ -minimaler Primteiler von $o(K)$. Nach dem im vorigen Absatz bewiesenen Resultat ist

eine p -Sylowuntergruppe P von K ein Normalteiler von K . Aus dem Schurschen Satz ergibt sich die Existenz einer $K = PC$, $1 = P \cap C$ erfüllenden Untergruppe C von K ; vgl. ZASSENHAUS, p. 125, Satz 25. Da p ein Teiler von $o(K)$ ist, so ist $P \neq 1$ und $C < K$. Aus der Minimalität von K folgt also die σ -Verstreutheit von C . Folglich ist auch die isomorphe Gruppe $K/P \cong C$ eine σ -verstreute Gruppe. Daraus schließen wir, daß die Gesamtheit $(K/P)_s$ der $\mathfrak{s}$ -Elemente aus K/P eine charakteristische $\mathfrak{s}$ -Untergruppe von K/P ist. Da p eine σ -minimale Primzahl aus $\mathfrak{s} \cap c(K)$ ist, so sieht man sofort ein, daß $(K/P)_s = K_s/P$ ist, daß also die Menge K_s aller $\mathfrak{s}$ -Elemente aus K eine charakteristische $\mathfrak{s}$ -Untergruppe von K ist. Damit haben wir aber die σ -Verstreutheit von K dargetan im Widerspruch zu unserer Wahl von K ; und aus diesem Widerspruch folgt die G -Verstreutheit von G , q.e.d.

BEMERKUNG 2. Ein Vergleich des Beweises des Ergänzungssatzes mit dem des Lemmas zeigt, daß der beim Beweis des Lemmas benötigte Burnsidesche Satz beim Beweis des Ergänzungssatzes umgangen werden könnte.

Im folgenden wollen wir Gruppen untersuchen, in denen die Bedingungen des Satzes 1 nur für Primzahlen aus einer gewissen vorgegebenen Menge gelten. Zur präzisen Definition dieser Gruppenklasse müssen wir zunächst jeder Primzahlmenge r und jeder Gruppe G eine Primzahlrelation $\sigma_{r,G}$ folgendermaßen zuordnen:

Dann und nur dann gilt $p\sigma_{r,G}q$, wenn es Primzahlen $p_0, \dots, p_t$ in r mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$p = p_0, p_{i+1} \text{ ist } G\text{-stärker als } p_i, p_t = q.$$

Es ist klar, daß aus der Gültigkeit von $p\sigma_{r,G}q$ die Zugehörigkeit von p und q zu dem Durchschnitt $r \cap c(G)$ folgt. Ist weiter a eine Teilmenge von r und U eine Untergruppe von G , so folgt aus der Gültigkeit von $p\sigma_{a,U}q$ auch die von $p\sigma_{r,G}q$, aber natürlich nicht umgekehrt. — Die Beziehung $\sigma_{r,G}$ ist stets transitiv. Sie definiert also dann und nur dann eine Halbordnung in r , wenn $p\sigma_{r,G}p$ nie gilt. — Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die früher betrachtete Bewertung von $c(G)$ jetzt von uns als $\sigma_{c(G),G}$ bezeichnet werden würde.

Ist r eine Menge von Primzahlen, so werde die Gruppe G als r -reguläre Gruppe bezeichnet, wenn

- (a) $\sigma_{r,G}$ eine Halbordnung in r definiert und
- (b) jede Untergruppe U von G zu jedem Primzahlpaar p, q aus $r \cap c(U)$ eine Hallsche Untergruppe der Charakteristik p, q besitzt.

Man beachte, daß in Satz 1 nur die Bedingung (a) auftritt, während (b) durch das Lemma nahegelegt wird, und daß Bedingung (a) dann und nur dann erfüllt ist, wenn $p\sigma_{r,G}p$ für kein p aus $r \cap c(G)$ gilt. — Aus den oben erwähnten Beziehungen zwischen verschiedenen σ -Relationen ergibt sich sofort, daß Untergruppen r -regulärer Gruppen ebenfalls r -regulär sind. Daß r -Regularität auch bei Faktorgruppenbildung erhalten bleibt, scheint nicht so leicht direkt verifizierbar zu sein, wird sich aber mit Hilfe von Satz 2 beweisen lassen.

SATZ 2. Die Gruppe G ist dann und nur dann r -regulär, wenn

(S) jede Untergruppe U von G eine Hallische Sylowturmuntergruppe der Charakteristik $r \cap c(U)$ besitzt und

(K) jede Untergruppe V von G zu einer Untergruppe einer jeden Hallischen r -Untergruppe H von G mit $o(V) \mid o(H)$ in G konjugiert ist.

Wir machen darauf aufmerksam, daß in (S) eine Hallische Untergruppe von U , in (K) aber nur Hallische Untergruppen von G vorkommen.

BEWEIS. Wir setzen zunächst die r -Regularität von G voraus und wollen daraus die Gültigkeit von (S), (K) und mehr herleiten.

(A) Jede Untergruppe U von G besitzt eine auflösbare Hallische Untergruppe der Charakteristik $r \cap c(U)$.

Diese Aussage ist sicher richtig, wenn $r \cap c(U)$ leer ist; und wir können also die Induktionsannahme machen, daß (A) für all die Untergruppen V von G mit $r \cap c(V) < r \cap c(U)$ gilt. Da $\sigma_{r,G}$ wegen (a) eine Halbordnung in r definiert, und da $r \cap c(U)$ eine endliche, nicht leere Menge ist, so gibt es in $r \cap c(U)$ eine $\sigma_{r,G}$ -minimale Primzahl p . Es sei P eine p -Sylowuntergruppe von U und V der Normalisator von P in U . Ist q eine von p verschiedene Primzahl aus $r \cap c(U)$, so folgt aus der Minimalität von p , daß p nicht G -stärker als q ist, und daß also insbesondere kein Element aus U in einer q -Untergruppe von U einen Automorphismus der Ordnung p induziert. Aus der Bedingung (b) folgt die Existenz einer Hallischen Untergruppe der Charakteristik p, q in U . Wir können also das Lemma anwenden. Folglich enthält V eine q -Sylowuntergruppe von U für jedes q aus $r \cap c(U)$.

Es ist P ein Normalteiler von V und $P \leq V \leq U$. Da P eine p -Sylowuntergruppe von U ist, so ist $[V:P]$ zu p teilerfremd. Anwendung des Schurschen Satzes ergibt die Existenz einer $V = PIW$, $1 = P \cap W$ erfüllenden Untergruppe W von V ; vgl. ZASSENHAUS, p. 125, Satz 25. Da dann $W \cong V/P$ ist, so enthält auch W eine q -Sylowuntergruppe von U für jedes $q \neq p$ aus $r \cap c(U)$. Da p kein Teiler von $o(W)$ ist, so enthält $r \cap c(W)$ weniger Primzahlen als $r \cap c(U)$, so daß also nach unserer Induktionsannahme (A) auf W anwendbar ist. Folglich besitzt W eine auflösbare Hallische Untergruppe H der Charakteristik $r \cap c(W)$. Da aber W für jedes q aus $r \cap c(W)$ eine q -Sylowuntergruppe von U enthält, so ist H sogar eine Hallische Untergruppe von U . Da W im Normalisator V der p -Sylowuntergruppe P von U liegt, so ist PH eine auflösbare Hallische Untergruppe der Charakteristik $r \cap c(U)$ von U ; und damit ist der induktive Beweis von (A) vollständig durchgeführt.

(B) Jede auflösbare r -Untergruppe von G ist $\sigma_{r,G}$ -verstreut.

Es sei A eine auflösbare r -Untergruppe von G . Da dann $c(A) \leq r$ ist, so folgt aus (a), daß die Bewertung in $c(A)$ eine Halbordnung definiert. Satz 1 und sein Ergänzungssatz sind also auf A anwendbar. Da die Bewertung von $c(A)$ weiter nichts als $\sigma_{c(A),A}$ ist, so haben wir damit die $\sigma_{c(A),A}$ -Verstreutheit von A bewiesen. Daraus folgt aber die $\sigma_{r,G}$ -Verstreutheit von A , da ja für Primteiler p, q von $o(A)$ aus $p \sigma_{c(A),A} q$ stets $p \sigma_{r,G} q$ folgt, also die Durchschnittte von $\sigma_{r,G}$ -Schweifen von r mit $c(A)$ stets $\sigma_{c(A),A}$ -Schweife von $c(A)$ sind.

Aus (A) und (B) folgt schon unsere Bedingung (S). Die Eigenschaften (A) und (B) besagen zusammengefaßt:

(R) Jede Untergruppe U von G besitzt eine $\sigma_{r,G}$ -verstreute Hallische Untergruppe der Charakteristik $r \cap c(U)$.

Gruppen mit der Eigenschaft (R) haben wir an anderer Stelle als $\sigma_{r,G}$ -reguläre Gruppen bezeichnet und wir haben für diese Gruppen die Gültigkeit der Eigenschaft (K) bewiesen; s. BAER [2; Satz 3]. Damit haben wir die Notwendigkeit der Bedingungen (S) und (K) bewiesen.

Wir nehmen jetzt umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (S) und (K) an. Dann besitzt G eine Hallische Sylowturmuntergruppe H der Charakteristik $r \cap c(G)$. Es folgt aus Satz 1, daß die Bewertung von $c(H)$ eine Halbordnung in $c(H)$ definiert. Wir erinnern daran, daß diese Bewertung gerade $\sigma_{r,H}$ ist, und daß $c(H) = r \cap c(G)$ gilt. Sind nun p, q verschiedene Primzahlen aus r , und ist p weiter G -stärker als q , so gibt es eine q -Untergruppe Q von G , in der ein p -Element g aus G einen Automorphismus der Ordnung p induziert. Dann ist $U = \{Q, g\} = Q\{g\}$ eine Gruppe der Charakteristik p, q . Aus $Q \neq 1$, $g \neq 1$ folgt die Zugehörigkeit von p, q zu $c(G)$. Also liegen p und q in $r \cap c(G) = c(H)$. Da aber H eine Hallische Untergruppe der Charakteristik $c(H)$ von G ist, so ist $o(U)$ ein Teiler von $o(H)$. Aus (K) folgt also, daß U zu einer Untergruppe von H konjugiert ist; und folglich ist p auch H -stärker als q . Ist p umgekehrt H -stärker als q , so ist p auch G -stärker als q . Daraus folgt die Identität der Beziehungen $\sigma_{r,G}$ und $\sigma_{r,H}$ in $r \cap c(G) = c(H)$. Da wir aber schon gezeigt hatten, daß $\sigma_{r,H}$ eine Halbordnung in $c(H)$ definiert, so haben wir die Gültigkeit von (a) dargetan. — Die Gültigkeit von (b) ergibt sich mühelos aus (S), der Auflösbarkeit der Sylowturmgruppen und den Hallischen Sätzen.

BEMERKUNG 3. Gelten die Bedingungen (S) und (K) in G , so überzeugt man sich leicht davon, daß sie auch in allen Faktorgruppen von G gelten. Wegen Satz 2 folgt also aus der r -Regularität einer Gruppe G die aller ihrer Faktorgruppen.

Literatur

- BAER, R.: [1] Classes of finite groups and their properties. Illinois J. of Math. **1**, 115—187 (1957). — [2] Verstreute Untergruppen endlicher Gruppen. Archiv der Math. (1958). — HALL, P.: Theorems like Sylow's. Proc. London Math. Soc. **6**, 286—304 (1956). — ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. I. Leipzig u. Berlin 1937.

Frankfurt a.M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 8. November 1957)

Konjunkturschwankungen Markoffscher n -Personen-Prozesse mit monomialer Regelung

Herrn HELLMUTH KNESER zum 60. Geburtstag am 16. April 1958 gewidmet

Von

KONRAD JACOBS

Unter dem Begriff „Konjunktur“ verstehen wir hier das zeitliche Verhalten der Wirtschaft, insofern es determiniert ist. Die theoretische Erfassung der realen Konjunkturvorgänge beruht auf der Konstruktion mathematisch durchschaubarer Modelle. Hierzu muß folgendes geleistet werden.

1. Die Gesamtheit aller möglichen Zustände der realen Wirtschaft wird auf eine abstrakte Punktmenge Ω abgebildet. Dies geschieht in der Regel mittels einer Meßvorschrift für endlichviele Zustandsparameter (Beschäftigung, Investition usw.), so daß Ω eine Punktmenge in R^n wird. Im allgemeinen werden noch weitere Parameter zur Festlegung des Zustandes nötig sein (z.B. geographische und gesetzliche Verhältnisse); man nimmt an, daß diese „äußeren“ Parameter während der zu behandelnden Vorgänge konstant bleiben (vgl. jedoch Nr. 4).

2. Es wird eine eindeutige Abbildung T von Ω in sich angegeben. Man interpretiert das so: Liegt zur Zeit t der Zustand $\omega \in \Omega$ vor, so liegt zur Zeit $t+1$ der Zustand $T\omega$ vor. Man trägt auf diese Weise dem zwangsläufigen, von der Entscheidungsfreiheit einzelner Individuen nicht zu beeinflussenden Charakter des Wirtschaftsvorganges Rechnung. Die hier miteingeschlossene Vereinbarung, den Vorgang nur in diskreten äquidistanten Zeitpunkten zu beobachten, bedeutet empirisch keine wesentliche Einschränkung.

3. Man untersucht für ein festes ω die Zustandsfolge $T^t\omega$ ($t=1, 2, \dots$), oder überhaupt die Folge T^t ($t=1, 2, \dots$). Hierbei kann man zwei verschiedene Ziele ins Auge fassen.

a) Man untersucht das asymptotische Verhalten der Folge T^t ganz allgemein und versucht, Periodizitätserscheinungen oder wie immer geartete Fluktuationen nachzuweisen, um auf diese Weise in das Wesen der Konjunkturschwankungen Einblick zu gewinnen.

b) Man versucht, die Folge $T^t\omega$ für kleine t möglichst genau zu berechnen, um kurzfristige Wirtschaftsprognosen anstellen zu können.

4. Man sucht die Abhängigkeit von T von realen Gegebenheiten zu ergründen, um zu verstehen, warum in T steckende, etwa nach 3a) nachgewiesene Periodizitätserscheinungen der Folge T^t in Wirklichkeit nie rein auftreten bzw. nach kurzem deutlichem Hervortreten wieder untergehen — eben weil T nur über kurze Zeiträume hinweg als konstant betrachtet werden kann. Hierzu wird

man im allgemeinen weitere „äußere“ Parameter einführen. Wir haben also im ganzen zwischen „inneren“ (den durch das Verhalten des Wirtschaftspublikums — einschließlich der Unternehmer — erzeugten, massenpsychologisch oder mechanisch determinierten [man nimmt in genauer Analogie zur Quantenmechanik an, daß sich die individuelle Handlungsfreiheit der Einzelnen einem determinierten statistischen Schema einfügt] Konjunkturschwankungen unterworfenen) und „äußeren“ (durch Natur-, Regierungs- und andere Gewalten bestimmten) Parametern zu unterscheiden. In der Festsetzung der Werte gewisser äußerer Parameter (z.B. des Diskontsatzes der Zentralbank) liegt eine Möglichkeit, in den Konjunkturvorgang willkürlich einzugreifen („konforme Eingriffe“ im Sinne von RÖPKE [20], S. 259). Eine andere Möglichkeit liegt darin, bislang innere Parameter zu äußeren zu machen und ebenfalls der willkürlichen Steuerung zu unterwerfen (Einführung der Zwangswirtschaft). Umgekehrt kann man im Einzelfall die Frage aufwerfen, ob vermeintlich äußere Parameter nicht besser als innere anzusehen sind — z.B. dann, wenn die Wirtschaftspolitik der Regierung unter dem Zwang einer massenpsychologischen Mechanik die Konjunkturschwankungen mitmacht, anstatt sich frei und überlegt gegen sie zu verhalten. Eine umfassende Konjunkturtheorie, deren Grundbegriffe wir hier entwickeln wollen, hat also ein Modell nicht allein für das wirtschaftliche, sondern für das Verhalten der Menschenmassen überhaupt, soweit es determiniert erscheint, zu geben. Endlich ist es klar, daß äußere Parameter in größerem Zusammenhang (z.B. beim Übergang von nationalwirtschaftlicher zu weltwirtschaftlicher Betrachtungsweise) zu inneren werden können.

Die vorliegende Arbeit enthält methodische Vorbereitungen zur Behandlung der Fragestellung 3a). Hierzu sind zunächst die Punkte 1 und 2 zu betrachten (Festlegung des Modells). Einen Überblick über die bisher von nationalökonomischer Seite aufgestellten Konjunkturmodelle gibt FÖHL [5] unter Benützung von Begriffsbildungen der Regelungstheorie (Konjunkturprobleme sind Regelungsprobleme; vgl. OPPELT [18]); vgl. ferner JÖHR [11]. Eine Durchführung der Aufgabe 3a) für einzelne Modelle (z.B. Cobweb und SAMELSON-HICKS) findet sich bei ALLEN [2]. Für die Aufgabe 3b) vgl. z.B. LANGE LÜTKE-MARQUARDT [14], FELS [4] („Konjunkturtest“).

Die bisherigen Konjunkturmodelle haben einen Nachteil: die verwendeten Parameter sind nicht dimensionslos und man muß, um sie zu messen, an sich unvergleichbare Größen gewaltsam addieren (z.B. vernachlässigt man bei der Berechnung von Arbeitsmengen Qualitätsunterschiede; vgl. jedoch z.B. KEYNES [12], Kap. 4). Es erscheint deshalb als für grundsätzliche Untersuchungen vorteilhaft, als Parameter ausschließlich dimensionslose Größen, und zwar Wahrscheinlichkeiten zu verwenden (das geschieht auch beim Konjunkturtestverfahren [14], [4]). Dies ist eine für die Spieltheorie fundamentale Idee ([17]). Man wird dann hoffen, Methoden der Wahrscheinlichkeits- bzw. Spieltheorie für unser Problem fruchtbar zu machen. Deshalb soll hier der Versuch gemacht werden, ein durch spiel- und wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffsbildungen gekennzeichnetes Konjunkturmodell aufzustellen:

Wir betrachten die Gesamtheit E aller an der Wirtschaft beteiligten Personen und bilden eine Überdeckung $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$. Die Mengen E_k müssen nicht disjunkt sein, z. B. $E_1 = \{\text{Arbeiter}\}$, $E_2 = \{\text{Unternehmer}\}$, $E_3 = \{\text{Aktionäre}\}$, $E_4 = \{\text{Konsumenten}\}$ usw. — Jedes Individuum aus E_k habe die Wahl zwischen d_k Arten des Verhaltens („reinen Strategien“). Es sei h_k^o der Bruchteil der Individuen von E_k , die die Strategie o wählen. Dann gilt $\sum_{o=1}^{d_k} h_k^o = 1$, $h_k^o \geq 0$, d. h. wir haben eine Wahrscheinlichkeitsverteilung h_k . Diese Verteilung wird sich im Laufe der Zeit ändern. Nehmen wir an, daß zwischen den Zeiten t und $t+1$ der Bruchteil $p_{ij}^{(k)}(t+1, t)$ derjenigen Leute aus E_k , die die Strategie j haben, zur Strategie i übergeht, so regelt sich die zeitliche Entwicklung von h_k als Markoffscher Prozeß (DOOB [21], JACOBS [7]). Die Übergangsmatrizen $P_k(t+1, t) = p_{ij}^{(k)}(t+1, t)$ werden im allgemeinen nicht konstant sein; sie hängen von den Ansichten der Individuen aus E_k über die gesamte Wirtschaftssituation $(h_1, \dots, h_n)$, und damit von $(h_1, \dots, h_n)$ ab:

$$(0.1) \quad \begin{cases} P_k(t+1, t) = F_k(h_1, \dots, h_n) \\ T(h_1, \dots, h_n) = (F_1(h_1, \dots, h_n) h_1, \dots, F_n(h_1, \dots, h_n) h_n). \end{cases}$$

Damit ist das Modell grundsätzlich beschrieben. Man sieht, daß seine Gültigkeit nicht auf das ökonomische Verhalten beschränkt ist.

Eine bekannte Arbeit von NASH [16] ist hier wesentlich. NASH [16] hat die Frage nach der Existenz von Gleichgewichtssituationen aufgestellt und sie in die Frage nach der Existenz von Fixpunkten von T umgeformt; nach dem Fixpunktsatz von BROUWER [1] gibt es, falls T stetig ist, stets Gleichgewichtssituationen, d. h. Situationen, in denen die Strategiewechsel der Individuen sich genau kompensieren. Das von NASH benützte Modell läßt sich leicht auf die oben beschriebene Gestalt bringen.

Nach (0.1) kann man die Zustände zu allen Zeiten $t=1, 2, \dots$ berechnen, wenn man den Zustand zur Zeit 0 kennt, zugleich berechnet man die $P(t+1, t)$. Man kann das Problem ohne Verlust an Allgemeinheit vereinfachen, indem man nur mit den P_k arbeitet, also n Markoffsche Prozesse behandelt, die sich gegenseitig beeinflussen. Auf diese Weise gelangt man von selbst zum Begriff des Markoffschen n -Personen-Prozesses und der Regelung; es handelt sich darum, spezielle Regelungen, insbesondere die für das Modell von NASH passenden, zu untersuchen und das Problem 3a) für die Zugehörigen T bzw. die resultierenden Prozesse zu lösen.

Leider bin ich nicht imstande, dieses Problem für die in Rede stehenden Regelungen zu lösen. Es soll deshalb versucht werden, einfachere Regelungen zu behandeln, in der Hoffnung, daß die dabei ausgebildeten Methoden sich derart fortentwickeln lassen, daß der eigentlich interessante Fall erledigt werden kann.

Wir betrachten deshalb *monomiale* Regelungen und Markoffsche n -Personen-Prozesse, die diesen gehorchen. Unser Hauptergebnis lautet: Diese

Prozesse verhalten sich exponentiell-asymptotisch periodisch (Theorem II, §6). Bei monomialen Regelungen lassen sich die Abhängigkeitsverhältnisse auf rein kombinatorischem Wege durchschauen (§§ 1–3). Interessanterweise treten fast alle unter Nr. 4 angedeuteten realen Phänomene in der Theorie auf. So muß man von kleineren zu größeren Wirtschaftseinheiten fortschreiten und hierbei äußere Parameter zu inneren ernennen (bzw. das entsprechende in umgekehrter Richtung). Die verwendeten Methoden sind aus einem für gewisse Markoffsche Prozesse entwickelten Verfahren hervorgegangen (JACOBS [8], [9], [10]). Man weist z.B., um die Periodizität zu gewinnen, nach, daß für hinreichend späte Zeiten jede annähernde Wiederkehr sich periodisch fortpflanzen muß. Die Existenz solcher Wiederkünfte wird bewiesen, indem man das ganze Problem mittels eines geometrischen Lemmas (§ 4) diskret macht und dann das Dirichletsche Schubfachprinzip anwendet.

§ 1. Monomiale Regelungsschemata, Vergrößerung. Stämme

1. *Allgemeine Begriffe.* — Jeder der Zahlen $v = 1, \dots, n$ sei ein Zeichen Π_v zugeordnet. $\mathfrak{Z}_{\mu v}$ ($\mu, v = 1, \dots, n$) seien nichtleere Zeichenmengen. Kein Π_v sei in einem $\mathfrak{Z}_{\mu v}$ enthalten. Mit $\mathfrak{X}_{\mu v}$ bezeichnen wir die Menge aller Zeichenfolgen

$$Z_{\mu k} Z_{kj} \dots Z_{lv} \quad (Z_{\sigma} \sigma \in \mathfrak{Z}_{\sigma})$$

(mit kohärenten Indizes!). Ist $A_{\mu v} \in \mathfrak{X}_{\mu v}$, $B_{\nu k} \in \mathfrak{X}_{\nu k}$, so ist $A_{\mu v} B_{\nu k} \in \mathfrak{X}_{\mu k}$. Eine nichtleere Zeichenfolge

$$(1.1) \quad \varphi(\Pi_1, \dots, \Pi_n) = A_0 \Pi_{i_1} A_1 \dots A_{m-1} \Pi_{i_m} A_m$$

mit $A_{\mu-1} \in \mathfrak{X}_{i_{\mu-1}, i_{\mu}}$ ($\mu = 1, \dots, m$) (die Π_v müssen nicht alle vorkommen, sie können auch ganz fehlen) nennen wir ein *Wort* vom Grade m ; gilt überdies $A_0 \in \mathfrak{X}_{\nu, i_1}, \dots, A_m \in \mathfrak{X}_{i_m, \nu}$, so heißt φ ein *Wort für den Spieler ν* . Ist φ_ν ein Wort für den Spieler ν ($\nu = 1, \dots, n$), so bezeichnen wir das System $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (\varphi)$ als ein *monomiales Regelungsschema* für die *Spielermenge* $\Sigma = \{1, \dots, n\}$. Die $A \in \bigcup_{\mu, \nu} \mathfrak{X}_{\mu \nu}$ heißen die *Steuerungsgrößen* des Schemas.

Aus einem vorgelegten Schema $(\varphi) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ konstruiert man sogleich eine ganze Folge $(\varphi^{(k)})$ ($k = 1, 2, \dots$) neuer Schemata gemäß den Rekursionsformeln

$$(1.2) \quad \begin{cases} (\varphi^{(1)}) = (\varphi) \\ \varphi_\nu^{(k+1)} = \varphi_\nu(\varphi_1^{(k)}(\Pi_1, \dots, \Pi_n) \Pi_1, \dots, \varphi_n^{(k)}(\Pi_1, \dots, \Pi_n) \Pi_n) \varphi_\nu^{(k)}(\Pi_1, \dots, \Pi_n) \\ (\nu = 1, \dots, n) \end{cases}$$

$(\varphi^{(k)})$ heißt die *k-te Vergrößerung* von (φ) , oder: man kommt von (φ) auf $(\varphi^{(k)})$ durch Vergrößerung um k .

2. *Relativierung.* — Es sei Σ_0 eine echte (eventuell leere) Teilmenge der Spielermenge Σ und $\Sigma_1 = \Sigma - \Sigma_0$. Sei etwa $\Sigma_1 = \{1, \dots, r\}$, $\Sigma_0 = \{r+1, \dots, n\}$. Dann können wir aus einem beliebigen Schema $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein neues Schema $(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_r)$ erhalten, indem wir die Π_ν mit $\nu \in \Sigma_0$ „konstantsetzen“ oder „zu

Steuerungsgrößen ernennen“. Dies bedeutet: $\overline{\mathfrak{A}}_{\mu r}$ ($\mu, r \in \Sigma_1$) sei die Menge aller Worte (1.1) mit $A_0 \in \mathfrak{A}_{\mu i_1}$, $A_m \in \mathfrak{A}_{i_m, r}$, in denen kein Π_ϱ mit $\varrho \in \Sigma_1$ vorkommt. Jedes Wort $\varphi(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ hat dann die Gestalt

$$\bar{\varphi}(\Pi_1, \dots, \Pi_r) = \bar{A}_0 \Pi_{i_1} \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{l-1} \Pi_{i_l} \bar{A}_l,$$

wobei $\bar{A}_{\lambda-1} \in \mathfrak{A}_{i_{\lambda-1}, i_\lambda}$ ($\lambda = 2, \dots, l$) und $i_\lambda \leq r$ ($\lambda = 1, \dots, l$) gilt. Jedes Wort $\bar{\varphi}(\Pi_1, \dots, \Pi_r)$ mit diesen Eigenschaften kann man in dieser Weise aus einem Wort $\varphi(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ gewinnen. Ist $(q_1, \dots, q_n)$ ein monomiales Regelungsschema mit den Steuerungsgrößen $A \in \bigcup_{\mu, r \leq n} \mathfrak{A}_{\mu r}$, so ist $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_r)$ ebenfalls ein monomiales Regelungsschema mit den Steuerungsgrößen $\bar{A} \in \bigcup_{\varrho, \sigma \leq r} \mathfrak{A}_{\varrho \sigma}$. Man sagt, es sei aus $(q_1, \dots, q_n)$ durch Relativierung bezüglich Σ_0 entstanden. Vergrößerung und Relativierung sind nicht miteinander vertauschbar.

3. *Initialabbildungen und Stämme.* — Es sei $(q_1, \dots, q_n)$ ein monomiales Regelungsschema. Wir betrachten für jedes v das Wort $\varphi_v(\Pi_1, \dots, \Pi_n) \Pi_v$. Ist hier Π_v von links her gerechnet das erste der Zeichen Π_ϱ , so schreiben wir $i_v = I v$ und nennen I die *Initialabbildung* des Schemas. $I v$ heißt die *Initiale* des Spielers v (kommt kein Π_ϱ in φ_v vor, so ist $I v = v$). Man verifiziert leicht: Hat (φ) die Initialabbildung I , so hat die k -te Vergrößerung $(\varphi^{(k)})$ die Initialabbildung I^k .

Da I eine Abbildung von Σ in sich ist, gilt $\Sigma \supseteq I \Sigma \supseteq I^2 \Sigma \supseteq \dots$. Da Σ endlich ist, wird diese absteigende Kette nach endlichvielen Schritten konstant $\neq 0$ und man kann k so wählen, daß I^k idempotent wird: $(I^k)^2 = I^k$. Die Menge $I^k \Sigma$ heißt der *Stamm* des Schemas; er besteht aus denjenigen Spielern, die sozusagen das letzte Wort haben. In $(\varphi^{(k)})$ sind also alle Initialen Zeichen von Stamm-Spielern. Der Stamm enthält stets alle Spieler v , in deren φ_v überhaupt kein Π_ϱ vorkommt.

4. *Ausschöpfung von Σ durch Stämme.* — Es sei $(q_1, \dots, q_n)$ ein monomiales Regelungsschema und Σ_0 sein Stamm. Ist $\Sigma - \Sigma_0$ nichtleer, so erhalten wir durch Relativierung bezüglich Σ_0 ein neues Regelungsschema mit einem Stamm $\Sigma_1 \subseteq \Sigma - \Sigma_0$. Ist $\Sigma - (\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$ nichtleer, so erhalten wir durch Relativierung bezüglich $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ ein neues Regelungsschema mit einem Stamm $\Sigma_2 \subseteq \Sigma - (\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$. Da die Stämme nichtleer sind, wird Σ nach diesem Verfahren in endlichvielen Schritten ausgeschöpft.

§ 2. Autarke Mengen. Satellitengürtel

1. *Hintermänner.* — Es sei $(q_1, \dots, q_n)$ ein monomiales Regelungsschema. μ heiße ein *Vordermann* von v , wenn Π_v im Wort φ_μ vorkommt. v heiße ein *Hintermann* von μ , wenn es eine Kette

$$\mu = k_1, k_2, \dots, k_r = v$$

gibt, in der k_ϱ Vordermann von $k_{\varrho+1}$ ist ($\varrho = 1, \dots, r-1$). Man verifiziert leicht: Es gibt eine Vergrößerung $(\varphi^{(k)})$ von (φ) mit folgender Eigenschaft: v ist dann und nur dann Hintermann von μ , wenn v in φ_μ vorkommt. Es gilt

nämlich wegen (4.2): Kommt Π_σ in $\varphi_v^{(l)}$ vor, so auch in $\varphi_v^{(l+1)}$. Ferner ergibt sich aus der induktiv leicht zu beweisenden Formel

$$\varphi_v^{(l+1)} = \varphi_v^{(l)} (\varphi_1 (\Pi_1, \dots, \Pi_n) \Pi_1, \dots, \varphi_n (\Pi_1, \dots, \Pi_n) \Pi_n) \varphi_v (\Pi_1, \dots, \Pi_n)$$

die Aussage: Kommt Π_σ in φ_σ , Π_σ in $\varphi_v^{(l)}$ vor, so kommt Π_σ in $\varphi_v^{(l+1)}$ vor. M.a.W. nach geeigneter Vergrößerung kann man stets annehmen, daß die Hintermann-Vordermann-Relation symmetrisch ist. Es ist klar, daß durch Vergrößerung nichts an den Hintermann-Verhältnissen geändert wird. Die nachstehende Bildung ist also invariant gegen Vergrößerung: Ist $M \subseteq \Sigma$, so bezeichnen wir mit $H(M)$ die Menge aller Hintermänner von Spielern aus M (sie kann leer sein). Es gilt $H(M) \subseteq H(N)$ ($N \subseteq M$). Offenbar ist

$$(2.1) \quad H(H(M)) \subseteq H(M),$$

wobei nicht immer $=$ gelten muß: es kann vorkommen, daß ein Spieler Hintermann ist, ohne selbst Hintermänner zu haben.

2. *Relative Autarkie.* — Es sei Σ_0 eine echte (eventuell leere) Teilmenge von Σ . Eine Menge $M \subseteq \Sigma - \Sigma_0$ heiße Σ_0 -autark, wenn

$$H(M) - H(M) \cap \Sigma_0 \subseteq M$$

gilt (alle nicht zu M gehörigen Hintermänner sitzen im „Ausland“ Σ_0). Wegen (2.1) ist jede Menge der Gestalt $H(M) - H(M) \cap \Sigma_0$ Σ_0 -autark. Wir nennen eine nichtleere Σ_0 -autarke Menge M *minimal Σ_0 -autark*, wenn sie keine echte nichtleere Σ_0 -autarke Teilmenge besitzt. Offenbar ist dies genau dann der Fall, wenn $H(\{r\}) - H(\{r\}) \cap \Sigma_0 = M$ für jedes $r \in M$ gilt. Nach geeigneter Vergrößerung bedeutet dies: Ist $r \in M$, so kommen sämtliche Π_μ ($\mu \in M$) in φ_r vor, und sonst höchstens einige Π_ϱ ($\varrho \in \Sigma_0$). Ist Σ_0 leer, so lassen wir das Σ_0 in allen genannten Begriffen weg und sprechen von Autarkie schlechthin. Ist $0 \neq \Sigma_1 \subseteq \Sigma - \Sigma_0$ Σ_0 -autark, so besitzt Σ_1 eine nichtleere minimal- Σ_0 -autarke Teilmenge. Zwei solche Mengen sind stets entweder fremd oder identisch. Relativiert man bezüglich Σ_0 , so werden alle Σ_0 -autarken Mengen schlechthin autark. Hat man die in Nr. 1 genannte Vergrößerung dabei vorher vorgenommen, so werden Mengen, die vorher nicht Σ_0 -autark waren, nachher nicht autark sein; ist jene Vergrößerung nicht vorweg geleistet, so versagt diese Überlegung. Enthält φ_r kein Π_ϱ ($\varrho \in \Sigma$), so ist $\{r\}$ schlechthin autark.

3. *Ausschöpfung durch Satellitengürtel.* — Es sei $(q_1, \dots, q_n)$ ein monomiales Regelungsschema. $\Sigma_{01}, \dots, \Sigma_{0r_0}$ seien sämtliche minimal-autarken Mengen in Σ . Ihre Vereinigung $\Sigma_0 = \bigcup_{\varrho=1}^{r_0} \Sigma_{0\varrho}$ ist nichtleer; ist sie eine echte Teilmenge von Σ , so ist $\Sigma - \Sigma_0$ jedenfalls Σ_0 -autark; wir bilden sämtliche minimal- Σ_0 -autarken Teilmengen von $\Sigma - \Sigma_0$. Es seien dies $\Sigma_{11}, \dots, \Sigma_{1r_1}$. Ihre Vereinigung $\Sigma_1 = \bigcup_{\varrho=1}^{r_1} \Sigma_{1\varrho}$ ist nichtleer. Ist $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ eine echte Teilmenge von Σ , so ist $\Sigma - (\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$ jedenfalls $(\Sigma_0 \cup \Sigma_1)$ -autark usw. Dies Ausschöpfungsverfahren bricht nach endlichvielen Schritten ab. Wir bezeichnen das System $\Sigma_k = \bigcup_{\varrho=1}^{r_k} \Sigma_{k\varrho}$ als den k -ten Satellitengürtel unseres Regelungs-

schemas. Σ zerfällt also in diese Satellitengürtel. Man kann das Verfahren noch etwas anders beschreiben: Führt man nach passender Vergrößerung die Relativierung bezüglich $\Sigma_0 \cup \dots \cup \Sigma_k$ durch, so entsteht ein monomiales Regelungsschema für die Personen $v \in \Sigma - \bigcup_{j=0}^k \Sigma_j$, bezüglich dessen die Mengen $\Sigma_{k+1,1}, \dots, \Sigma_{k+1, r_{k+1}}$ schlechthin minimal-autark sind.

§ 3. Regelungen und Steuerungen

1. Allgemeine stochastische Regelungen. Vergrößerung. — Es seien $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_n$ reelle lineare Räume von endlicher Dimension $d_1, \dots, d_n$. Wir fixieren in jedem $\mathfrak{H}_v$ eine Basis $e_1^v, \dots, e_{d_v}^v$ und bezeichnen mit $\mathfrak{V}_v$ die Menge aller Vektoren $h = \sum_{\varrho=1}^{d_v} h^\varrho e_\varrho^v \in \mathfrak{H}_v$ mit $h^\varrho \geq 0$, $\sum_{\sigma=1}^{d_v} h^\sigma = 1$ ($\varrho = 1, \dots, d_v$). $\mathfrak{V}_v$ ist also das von den Spitzen der Basisvektoren aufgespannte Simplex. Die $h \in \mathfrak{V}_v$ können als Wahrscheinlichkeits- oder Massenverteilungen interpretiert werden, die sämtlichen $h \in \mathfrak{V}_v$ als Ladungsverteilungen (über d_v Zellen).

In $\mathfrak{H}_v$ ist eine Halbordnung gegeben, wenn man $g \geq h$ als Abkürzung für $g^\varrho \geq h^\varrho$ ($\varrho = 1, \dots, d_v$) schreibt. $\mathfrak{H}_v$ ist ein Vektorverband bezüglich dieser Halbordnung. Setzt man

$$\|h\| = \sum_{\varrho=1}^{d_v} |h^\varrho| \quad \langle h \rangle = \sum_{\varrho=1}^{d_v} h^\varrho,$$

so ist $\|h\|$ eine Norm, $\langle h \rangle$ eine Linearform in $\mathfrak{H}_v$. Für $h \geq 0$ gilt $\|h\| = \langle h \rangle$. Diese Beziehungen sind es, die der allgemeinen Theorie der stationären Markoffschen Prozesse zugrunde liegen (JACOBS [7], [8]). Von Ergebnissen dieser Theorie wird hier laufend Gebrauch gemacht, doch treten obige Anordnungsrelationen nicht explizit in den Vordergrund.

Es sei $\mathfrak{E}_{\mu\nu}$ die Menge aller linearen Abbildungen von $\mathfrak{H}_\nu$ in $\mathfrak{H}_\mu$, die $P\mathfrak{V}_\nu \subseteq \mathfrak{V}_\mu$ erfüllen. Sie sind durch Rechteckmatrizen p_{ik} (mit d_μ Zeilen und d_ν Spalten) gegeben, welche $p_{ik} \geq 0$, $\sum_j p_{jk} = 1$ erfüllen. Aus $P \in \mathfrak{E}_{\mu\nu}$, $Q \in \mathfrak{E}_{\nu\varrho}$ folgt $PQ \in \mathfrak{E}_{\mu\varrho}$: $\mathfrak{E}_{\mu\nu} \mathfrak{E}_{\nu\varrho} \subseteq \mathfrak{E}_{\mu\varrho}$. Für $\mathfrak{E}_{\nu\nu}$ schreiben wir auch kurz $\mathfrak{E}_\nu$. $\mathfrak{E}_\nu$ ist eine Halbgruppe. Setzt man

$$(3.4) \quad \|P\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|Ph\|$$

so folgt $\|P\| = 1$ für $P \in \mathfrak{E}_{\mu\nu}$. Aus $\|Ph - Qh\| < \varepsilon$ ($h \in \mathfrak{V}_\nu$) folgt $\|P - Q\| < \varepsilon$.

Sind für ganzes $t \geq 0$ und $v = 1, \dots, n$ Funktionen $f_v^{(t)}(P_1, \dots, P_n)$ von $P_\mu \in \mathfrak{E}_\mu$ ($\mu = 1, \dots, n$) mit Werten in $\mathfrak{E}_v$ gegeben, so sagt man, es sei eine *zeitlich gesteuerte stochastische Regelung* gegeben. Fehlt die t -Abhängigkeit, so spricht man von einer Regelung schlechthin oder von einer stationären Regelung.

Ein diskreter Markoffscher Prozeß für die Person v ist eine für ganze $t \geq s \geq 0$ erklärte Schar $P_v(t, s) \in \mathfrak{E}_v$ welche

$$(3.2) \quad P_v(t, s) = P_v(t, u) P_v(u, s) \quad (t \geq u \geq s \geq 0)$$

erfüllt. Ist zu jedem $v = 1, \dots, n$ ein Markoffscher Prozeß $P_v(t, s)$ gegeben, so nennt man das System $P_1(t, s), \dots, P_n(t, s)$ einen *Markoffschen n -Personen-Prozeß*. Man sagt, daß dieser Prozeß *der zeitlich gesteuerten Regelung* $f_1^{(t)}(P_1, \dots, P_n), \dots, f_n^{(t)}(P_1, \dots, P_n)$ *gehört*, wenn

$$(3.3) \quad P_v(t+1, t) = f_v^{(t)}(P_1(t, 0), \dots, P_n(t, 0)) \quad (v = 1, \dots, n; t = 1, 2, \dots)$$

gilt. Mittels (3.2) und (3.3) kann man den Prozeß rekurrent vollständig berechnen, wenn man die Regelung und die Anfangsdaten $P_v(0, 0)$ ($v = 1, \dots, n$) kennt. Man kann diesen Sachverhalt kurz so beschreiben: Sei

$$T^{(t)}(P_1, \dots, P_n) = (f_1^{(t)}(P_1, \dots, P_n), \dots, f_n^{(t)}(P_1, \dots, P_n)) \quad (P_v \in \mathfrak{S}_v; t = 1, 2, \dots).$$

Dies ist eine Abbildung des kartesischen Produkts $\mathfrak{S}_1 \times \dots \times \mathfrak{S}_n$ in sich. Es gilt

$$\begin{aligned} (P_1(t+1, 0), \dots, P_n(t+1, 0)) &= T^{(t)}(P_1(t, 0), \dots, P_n(t, 0)) \\ &= T^{(t)} T^{(t-1)} \dots T^{(0)}(P_1(0, 0), \dots, P_n(0, 0)). \end{aligned}$$

Ist die Regelung stationär, so ist $T^{(t)}$ t -unabhängig, etwa $T^{(t)} = T$.

Unser Interesse gilt dem asymptotischen Verhalten des Prozesses, d.h. der Schar $(P_1(t, 0), \dots, P_n(t, 0))$ ($t \geq 0$). Dies läuft, wenn man so will, auf die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Produkte $T^{(t)} T^{(t-1)} \dots T^{(0)}$ bzw., im stationär-geregelten Falle, der Potenzen T^t hinaus. Dies ist ein *Ergodenproblem*, das im stationären Falle prinzipiell mit den Mitteln der Kryloff-Bogoliouboffschen Theorie ([13], ОХТОВЫ [19]) anzugehen wäre. Indessen erweist es sich als zweckmäßig, die ursprüngliche Auffassung eines „Systems gekoppelter nichtstationärer Ergodenprobleme“ beizubehalten. Man kommt dann zu schärferen Resultaten, als jene Theorie zu liefern imstande ist.

Der n -Personen-Prozeß $(P(t, s))$ heißt *asymptotisch-periodisch*, wenn es zu jedem s reinperiodische Folgen $Q_v(t, s)$ ($t = s+1, s+2, \dots$) mit

$$(3.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|P_v(t, s) - Q_v(t, s)\| = 0$$

gibt, deren Perioden von s unabhängig gewählt werden können. Durch diese Forderungen sind die Folgen $Q_v(t, s)$, falls sie überhaupt existieren, eindeutig bestimmt. Sind sie konstant, so heißt der Prozeß *konvergent*. Notwendig und hinreichend für asymptotische Periodizität mit der Periode d ist folgende Bedingung: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $A > 0$ mit

$$\|P_v(t+kd, s) - P_v(t+ld, s)\| < \varepsilon \quad (t > s+A; k, l > 0).$$

Der aus dem n -Personen-Prozeß $P_1(t, s), \dots, P_n(t, s)$ mittels einer festen ganzen Zahl $k > 0$ hervorgehende Prozeß

$$Q_1(t, s), \dots, Q_n(t, s) \quad \text{mit} \quad Q_v(t, s) = P_v(tk, sk) \quad (v = 1, \dots, n)$$

wird die *Vergrößerung* jenes Prozesses um k genannt. Gehört der Prozeß $P_1(t, s), \dots, P_n(t, s)$ der Regelung $f_1^{(t)}, \dots, f_n^{(t)}$, so gehört auch der vergrößerte

Prozeß einer Regelung $g_{1k}^{(t)}, \dots, g_{nk}^{(t)}$. Sie berechnet sich folgendermaßen: Aus (3.3) folgt:

$$P_v(t+k, t) = f_v^{t+k-1}(P_1(t+k-1, 0), \dots, P_n(t+k-1, 0)) P_v(t+k-1, t).$$

Wir setzen diesen Ausdruck (nach k -maliger Rekursion)

$$= g_{vk}^{(t)}(P_1(t, 0), \dots, P_n(t, 0)).$$

Dann gelten die Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} g_{v1}^{(t)}(P_1(t, 0), \dots, P_n(t, 0)) &= f_v^{(t)}(P_1(t, 0), \dots, P_n(t, 0)) \\ g_{vk}^{(t)}(P_1(t, 0), \dots, P_n(t, 0)) &= f_v^{t+k-1} [g_{1, k-1}^{(t)}(P_1(t, 0), \dots, \\ &\dots, P_n(t, 0)) P_1(t, 0), \dots, g_{n, k-1}^{(t)}(P_1(t, 0), \dots, P_n(t, 0)) \\ &P_n(t, 0)] g_{v, k-1}^{(t)}(P_1(t, 0), \dots, P_n(t, 0)). \end{aligned}$$

Wir verallgemeinern dies zu

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{vk}^{(t)}(P_1, \dots, P_n) &= f_v^{t+k-1}(g_{1, k-1}^{(t)}(P_1, \dots, P_n) P_1, \dots \\ &\dots, g_{n, k-1}^{(t)}(P_1, \dots, P_n) P_n) g_{v, k-1}^{(t)}(P_1, \dots, P_n). \end{aligned} \right.$$

Der um k vergrößerte Prozeß besitzt dann die Regelung $f_{1k}^{(t)}, \dots, f_{nk}^{(t)}$ mit

$$(3.6) \quad f_{vk}^{(t)} = g_{vk}^{(tk)}.$$

Man nennt sie die k -te Vergrößerung der Regelung $f_1^{(t)}, \dots, f_n^{(t)}$. War die ursprüngliche Regelung stationär, so sind es auch alle Vergrößerungen.

2. *Monomiale Regelungen und Steuerungen.* — Es sei $(\varphi_1(\Pi_1, \dots, \Pi_n), \dots, \varphi_n(\Pi_1, \dots, \Pi_n))$ ein monomiales Regelungsschema für die Personen $v=1, \dots, n$, die zugehörigen Mengen von Steuerungsgrößen seien $\mathfrak{X}_{\mu v}$, die zugrunde liegenden Zeichenmengen $\mathfrak{Z}_{\mu v}$ ($\mu, v=1, \dots, n$). Sei jedem $A \in \mathfrak{Z}_{\mu v}$ genau ein $A \in \mathfrak{S}_{\mu v}$ zugeordnet. Damit ergibt sich zu jedem Wort $\varphi(\Pi_1, \dots, \Pi_n) = A_0 \Pi_{i_1} A_1 \dots$ $A_{m-1} \Pi_{i_m} A_m$ eine Funktion

$$f(P_1, \dots, P_n) = A_0 P_{i_1} A_1 P_{i_2} \dots A_{m-1} P_{i_m} A_m \quad (P_\varrho \in \mathfrak{S}_\varrho)$$

mit Worten aus einem $\mathfrak{S}_{\mu v}$. Funktionen dieser Bauart nennen wir *Monome*. Der Zusammensetzung der Wörter entspricht die Multiplikation der Monome (dabei sind stets Kohärenzbedingungen zu beachten). Ist jedem $A \in \mathfrak{Z}_{\mu v}$ eine t -Funktion $A(t)$ mit Werten in $\mathfrak{S}_{\mu v}$ zugeordnet, so entsteht nach dem obigen Verfahren aus dem monomialen Regelungsschema eine monomiale Regelung $(f_1^{(t)}(P_1, \dots, P_n), \dots, f_n^{(t)}(P_1, \dots, P_n))$. Die Zeitabhängigkeit der $f^{(t)}$ ist hier in den $A(t)$ klar lokalisiert: War

$$(3.7) \quad \varphi_v(\Pi_1, \dots, \Pi_n) = A_{v0} \Pi_{i_{v1}} A_{v1} \dots A_{v, m_v-1} \Pi_{i_{vm_v}} A_{vm_v},$$

so nennen wir das System der Funktionen $A_{vk}(t)$ die *Steuerung* der monomialen Regelung ($f^{(t)}$). Es ist klar, wann von stationärer bzw. konvergenter

bzw. asymptotisch-periodischer Steuerung zu sprechen ist. Vergleicht man die Rekursionsformeln (3.5) und (1.2), so ergibt sich: das um k vergrößerte monomiale Regelungsschema liefert die um k vergrößerte monomiale Regelung. Die Steuerung der k -ten Vergrößerung einer monomialen Regelung heißt die k -te Vergrößerung der ursprünglichen Steuerung.

Anmerkung. Verschiedene monomiale Regelungsschemata können sehr wohl dieselbe Regelung liefern. Wir denken uns im folgenden immer ein Regelungsschema fixiert und übertragen Begriffe wie „Stamm“, „Hintermann“, „Satellitengürtel“ auch auf die zugehörige Regelung bzw. den Markoffschen Prozeß.

§ 4. Ein geometrisches Lemma

Wir fixieren ein ν und lassen den Index ν in diesem Paragraphen stets weg. Wir betrachten abgeschlossene konvexe Mengen $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{B}$. Ein Punkt $h \in \mathfrak{R}$ heißt ein Extrempunkt von $\mathfrak{R}$, wenn keine Darstellung

$$h = \alpha f + \beta g, \quad f, g \in \mathfrak{R}, \quad f \neq g, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

möglich ist. $\mathfrak{R}$ ist stets die konvexe abgeschlossene Hülle der Menge aller Extrempunkte von $\mathfrak{R}$ (MINKOWSKI [15], BOURBAKI [3] (Satz von KREIN-MILMAN)). Hat $\mathfrak{R}$ nur endlichviele Extrempunkte, so heißt $\mathfrak{R}$ ein Polyeder, die Extrempunkte von $\mathfrak{R}$ heißen dann auch Ecken. Im folgenden werden nur mehr konvexe Polyeder $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{B}$ betrachtet. Sind $h_1, \dots, h_r$ die verschiedenen Ecken von $\mathfrak{R}$ und gilt

$$\|h_\sigma - h_\varrho\| \geq \alpha \geq 0 \quad (\sigma \neq \varrho),$$

so sagt man, $\mathfrak{R}$ habe die Weite α . Wegen $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{B}$ gibt es keine Polyeder mit mehr als 1 Ecke, die eine Weite > 2 besitzen. Einpunktigen Polyedern schreiben wir jede Weite ≤ 2 zu. Ist $h = \sum_{\varrho=1}^d h^\varrho c_\varrho$, so bezeichnen wir die Menge aller g mit $h^\varrho \neq 0$ als den Träger von h . Wegen der allgemeinen Relation $\|g \cap h\| = \frac{1}{2}(2 - \|g - h\|)$ ($g, h \in \mathfrak{B}$; $g \cap h$ bezeichnet das Minimum von g und h im Sinne der in § 3 definierten Halbordnung (koeffizientenweise zu verstehen)) folgt aus $\|g - h\| = 2(g, h \in \mathfrak{B})$ stets $g \cap h = 0$, was mit der Trägerfremdheit von g und h gleichbedeutend ist. Ist also ein Polyeder $\mathfrak{R}$ von der Weite 2, so sind seine Ecken paarweise trägerfremd, also gewiß linear unabhängig.

Um fernerhin Polyeder bequem miteinander vergleichen zu können, benutzen wir den asymmetrischen Mengenabstand

$$|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| = \sup_{g \in \mathfrak{B}} \inf_{h \in \mathfrak{A}} \|g - h\|$$

(für nichtleere $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$). Aus $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}$ folgt $|\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}| \geq |\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| \geq |\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0|$. Es ist $|\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0| = 0$. Umgekehrt folgt aus $|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| = 0$ für abgeschlossenes $\mathfrak{A}$ stets $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Mit dem symmetrischen Mengenabstand

$$||\mathfrak{A}, \mathfrak{B}|| = \frac{1}{2}(|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| + |\mathfrak{B}, \mathfrak{A}|)$$

teilt der asymmetrische Abstand folgende Eigenschaften:

$$1. \quad |\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| \leq |\mathfrak{A}, \mathfrak{C}| + |\mathfrak{C}, \mathfrak{B}|, \quad ||\mathfrak{A}, \mathfrak{B}|| \leq ||\mathfrak{A}, \mathfrak{C}|| + ||\mathfrak{C}, \mathfrak{B}||.$$

$$2. \quad |P\mathfrak{A}, P\mathfrak{B}| \leq ||P|| \cdot |\mathfrak{A}, \mathfrak{B}|, \quad ||P\mathfrak{A}, P\mathfrak{B}|| \leq ||P|| \cdot ||\mathfrak{A}, \mathfrak{B}||$$

für lineare Transformationen P .

$$3. \quad |P\mathfrak{A}, Q\mathfrak{A}| \leq ||P - Q|| \cdot |\{0\}, \mathfrak{A}|, \quad ||P\mathfrak{A}, Q\mathfrak{A}|| \leq ||P - Q|| \cdot ||\{0\}, \mathfrak{A}||$$

für lineare Transformationen P, Q .

Es gilt nun das

Lemma. *Es gibt eine (vom Maximum der Dimensionen d_v abhängige) Konstante $\Gamma > 0$ mit folgenden Eigenschaften: Ist $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ und ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_v$ ein konvexes Polyeder mit r Ecken und der Weite $2 - \frac{\varepsilon}{\Gamma}$, so ist es ein Simplex, d.h. seine Ecken sind linear unabhängig. Ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}_v$ ein konvexes Polyeder und gilt*

$$|\mathfrak{B}, \mathfrak{A}| < \frac{\Gamma}{\varepsilon}$$

so hat $\mathfrak{B}$ mindestens r Ecken. Hat $\mathfrak{B}$ genau r Ecken, so gilt

$$|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| < \varepsilon$$

und es gibt zu jeder Durchzählung $a_1, \dots, a_r$ bzw. $b_1, \dots, b_r$ der Ecken von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ genau eine Permutation π der Zahlen $1, \dots, r$ mit

$$||a_\varrho - b_{\pi(\varrho)}|| < \varepsilon \quad (\varrho = 1, \dots, r).$$

Beweis. Ein vollständiger Beweis der wesentlichsten Aussagen des Lemmas ist in [8] gegeben worden. Nach der dort gegebenen Abschätzung darf man

$$\Gamma = 2(4d^2 - 2d - 1)(2d - 1)(d - 1) \quad (d = \max_v d_v)$$

setzen. Vgl. ferner [10].

§ 5. Das asymptotische Verhalten minimal-autarker Prozesse

Unser Ziel ist es, zu zeigen, daß jeder Markoffsche n -Personen-Prozeß mit monomialer Regelung sich exponentiell-asymptotisch-periodisch verhält (Theorem II). Zunächst fixieren wir den Begriff „exponentiell“.

Definition. *Man sagt, die reelle Zahlenfolge a_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) konvergiere exponentiell gegen 0, in Zeichen*

$$a_k \rightarrow 0 \quad \text{oder} \quad \lim a_k = 0 \quad (\text{exponentiell}),$$

wenn es reelle Zahlen ϑ, K mit $0 < \vartheta < 1$, $K > 0$ gibt, derart, daß

$$|a_k| \leq \vartheta^k \quad (k \geq K)$$

gilt. Man sagt, eine Folge h_k von Vektoren im R^n konvergiere exponentiell gegen $h \in R^n$, wenn $||h_k - h|| \rightarrow 0$ (exponentiell) gilt. Man sagt, die Folge h_k sei zur

Folge g_k exponentiell-äquivalent, wenn $\|h_k - g_k\| \rightarrow 0$ (exponentiell) gilt. Entsprechend seien die Begriffe „exponentiell-konvergent“ und „exponentiell-äquivalent“ für Folgen linearer Transformationen im R^n erklärt.

Satz 5.1. Sei a_k ($k=1, 2, \dots$) eine reelle Zahlenfolge. Es gilt

$$a_k \rightarrow 0 \quad (\text{exponentiell})$$

dann und nur dann, wenn es Zahlen η, A, B mit $0 < \eta < 1, A > 0, B > 0$, sowie eine natürliche Zahl $d > 0$ gibt, derart, daß

$$|a_k| \leq A \eta^m$$

für $k - B \geq m d$ gilt.

Beweis. Wir setzen $\vartheta = \sqrt[d]{\eta}$. Ist $[k] = \max_{n d + B \leq k} n$ ($k \geq B$), so gelten die Rechenregeln

$$k \geq B + [k]d, \quad [k + r d] = [k] + r \quad (k \geq B)$$

und man hat

$$|a_k| \leq A \eta^{[k]} \quad (k \geq B).$$

Bestimmt man m derart, daß

$$A \eta^m \leq 1$$

gilt, so kommt

$$\begin{aligned} |a_{k+(m+B)d}| &\leq A \eta^{[k+(m+B)d]} = A \eta^{[k] + (m+B)} \\ &\leq \eta^{[k] + B} \leq \vartheta^{2([k]d + B)} \leq \vartheta^{2k} \end{aligned}$$

oder — für $k \geq (m+B)d + 1$ —

$$|a_k| \leq \vartheta^{k - (m+B)d} = \vartheta^k \vartheta^{k - 2(m+B)d}$$

Wählt man $K \geq (m+B)d + 1$ so, daß $\vartheta^{k - 2(m+B)d} \leq 1$ ($k \geq K$) gilt, so folgt offenbar die Behauptung.

Satz 5.2. Es seien $A_k, B_k, \dots, C_k$ ($k=1, 2, \dots$) Folgen linearer Abbildungen gewisser linearer Räume in gewisse andere lineare Räume. Sind $X_k, Y_k, \dots, Z_k$ zu jenen Folgen bzw. exponentiell-äquivalente Folgen so sind auch die Folgen

$$\alpha A_k + \beta B_k + \dots + \gamma C_k, \quad A_k B_k \dots C_k$$

und

$$\alpha X_k + \beta Y_k + \dots + \gamma Z_k, \quad X_k Y_k \dots Z_k$$

(mit beliebigen, festen reellen $\alpha, \beta, \dots, \gamma$) bzw. zueinander exponentiell-äquivalent, falls die angegebenen Bildungen (Linearkombinationen bzw. Produkte) sinnvoll sind.

Beweis. Offenbar kann man ein einziges ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ und ein $K > 0$ mit

$$\|A_k - X_k\| \leq \vartheta^k, \dots, \|C_k - Z_k\| \leq \vartheta^k \quad (k \geq K)$$

finden. Es gilt

$$\|(\alpha A_k + \dots + \gamma C_k) - (\alpha X_k + \dots + \gamma Z_k)\| \leq (|\alpha| + \dots + |\gamma|) \vartheta^k \quad (k \geq K),$$

woraus sich nach Satz 5.1 die exponentielle Äquivalenz der linearkombinierten Folgen ergibt. Ist I eine Schranke für sämtliche betrachteten Folgen, so schätzt man ab:

$$\begin{aligned} & \|A_k B_k \dots C_k - X_k Y_k \dots Z_k\| \\ & \leq \|(A_k - X_k) B_k \dots C_k\| + \|X_k (B_k - Y_k) \dots C_k\| + \dots + \|X_k Y_k \dots (C_k - Z_k)\| \\ & \leq n I^{n-1} \vartheta^k \quad (k \geq K) \end{aligned}$$

falls es sich um jeweils n Folgen handelt. Nach Satz 5.1 ist nunmehr alles bewiesen.

Es sei nun $\varphi_1(\Pi_1, \dots, \Pi_n), \dots, \varphi_n(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ ein minimal-autarkes Regulationsschema für n Personen. Sodann gehen wir zu einem Markoffschen n -Personen-Prozeß $P_1(t, s), \dots, P_n(t, s)$ [in Räumen $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ mit zugehörigen Simplexes $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n$ und Transformationsmengen $\mathfrak{S}_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, \dots, n$)] über, dessen Steuerung exponentiell-äquivalent zu einer reinperiodischen Steuerung sei. Wir bemerken zunächst: Nach geeigneter Vergrößerung ist die Steuerung des Prozesses exponentiell-konvergent. Dies ist aus (3.6) zu entnehmen. Man kann jeden exponentiell-asymptotisch periodischen Prozeß durch Vergrößerung um die Periodenlänge exponentiell-konvergent machen.

Theorem I. *Jeder exponentiell-asymptotisch periodisch gesteuerte minimal-autarke Markoffsche n -Personen-Prozeß ist selbst wieder exponentiell-asymptotisch periodisch, d.h. für jedes feste s sind die Folgen $P_v(t, s)$ ($t = s+1, s+2, \dots$) zu reinperiodischen Folgen (mit s -unabhängig wählbarer Periodenlänge) exponentiell-äquivalent.*

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt. Wir beweisen zunächst einen Satz, der einen Spezialfall erledigt.

Satz 5.3. *Ist $P(s, t)$ ein Markoffscher Prozeß und gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t+1, t) = P \quad (\text{exponentiell}),$$

so kann man eine natürliche Zahl $d > 0$ derart bestimmen, daß die Folge P^{kd} ($k = 1, 2, \dots$) exponentiell konvergiert. Dann ist die Vergrößerung des Prozesses um d exponentiell konvergent.

Beweis. Offenbar genügt es, die Konvergenz der Folge $P(td, 0)$ ($t = 1, 2, \dots$) zu beweisen. Wir wählen d so, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^{td} = R \quad (\text{exponentiell})$$

gilt; nach der Theorie der stationären Prozesse (vgl. etwa JACOBS [7]) ist dies stets möglich. Nach Satz 5.2 gibt es ein ϑ und ein T mit $0 < \vartheta < 1$, $T > 0$ und

$$\begin{aligned} (5.1) \quad & \|P((t+1)d, td) - P^{td}\| \leq \vartheta^t \\ (5.2) \quad & \|P^{td} - R\| \leq \vartheta^t \end{aligned} \quad (t \geq T)$$

Für $t > T$ und beliebige ganze $k, l > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} & \|P((2t+k)d, 0) - P((2t+l)d, 0)\| \\ & \leq \|P((2t+k)d, td) - P((2t+l)d, td)\| \\ & \leq \|P^{(2t+k-l)d} - P^{(2t+l-l)d}\| + \frac{2\vartheta^t}{1-\vartheta} \quad [\text{wegen (5.1)}] \\ & \leq 2\vartheta^t + \frac{2\vartheta^t}{1-\vartheta} \quad [\text{wegen (5.2)}], \end{aligned}$$

womit nach Satz 5.1 alles bewiesen ist.

Nimmt man den nachstehenden Satz 5.4 zu Hilfe, so ist mit Satz 5.3 das Theorem I für den Fall, daß Σ aus einem einzigen Spieler besteht, in dessen Regelungswort sein Zeichen Π nicht vorkommt (mehrere solche Spieler mit „purer Steuerung“ kann es wegen der Minimal-Autarkie nicht geben) bewiesen. Wir können im folgenden also immer annehmen, daß sämtliche Regelungsworte positiven Grad besitzen.

Der Beweis von Satz 5.3 lehrt, daß es gewöhnlich bequemer ist, die exponentiell-asymptotische Konvergenz einer Vergrößerung eines Prozesses zu beweisen, als die exponentielle asymptotische Periodizität des Prozesses selbst. Es gilt der

Satz 5.4. *Es sei ein exponentiell-asymptotisch periodisch gesteuerter Markoffscher n -Personen-Prozeß mit monomialer Regelung gegeben. Gibt es eine exponentiell-konvergente Vergrößerung des Prozesses, so ist der Prozeß selbst exponentiell-asymptotisch periodisch.*

Beweis. Es seien $P_1(t, s), \dots, P_n(t, s)$ die beteiligten Einzelprozesse und es gelte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_v(td, sd) = P_v(sd) \quad (\text{exponentiell}, \quad v = 1, \dots, n).$$

Wir können annehmen (Vergrößerung!), daß d zugleich eine asymptotische Periode der Steuerung ist. Sei $f_1^{(t)}, \dots, f_n^{(t)}$ die Regelung des (nicht vergrößerten) Prozesses. Dann ist

$$(5.3) \quad \begin{cases} P_v(td + k, td + k - 1) \\ = f_v^{(td+k-1)}(P_1(td + k - 1, 0), \dots, P_n(td + k - 1, 0)) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Mittels Satz 5.2 gewinnt man daher sukzessive die exponentielle Konvergenz der linken Seiten von (5.3) für $t \rightarrow \infty$ bei festem k . Der Limes sei $Q(k)$. Offenbar gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_v(td + k, sd) = Q_v(k) Q_v(k - 1) \dots Q_v(1) P_v(sd) \quad (\text{exponentiell}).$$

Die rechte Seite hängt offenbar reinperiodisch mit der Periode d von k ab:

$$Q_v(d) Q_v(d - 1) \dots Q_v(1) P_v(sd) = P_v(sd).$$

Mittels Satz 5.2 folgert man nun leicht, daß $P_v(t, sd)$ zu dieser Folge exponentiell-äquivalent ist. Es ist klar, daß man die exponentiell-asymptotische

Periodizität der Folgen $P_v(t, s)$ ($t = s + 1, s + 2, \dots$) für alle s hat, wenn man sie für alle $s\bar{d}$ hat; q. e. d.

Zum Beweis von Theorem I genügt es also, die exponentielle Konvergenz einer Vergrößerung des Prozesses zu beweisen.

Wir beweisen nun in loser Folge weitere Aussagen. Einige der dabei verwendeten Beweisideen kommen im Spezialfalle $n = 1$ wesentlich durchsichtiger heraus; sie sind in [10] publiziert.

1. Wir denken uns den Prozeß von vornherein so vergrößert, daß die Initialabbildung des zugehörigen Regelungsschemas idempotent und die Steuerung des Prozesses exponentiell konvergent wird. Ferner können wir annehmen (Vergrößerung!), daß in jedem der Regelungsworte $q_v(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ sämtliche Zeichen $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ wirklich vorkommen (wegen der Minimal-Autarkie). Es sei Σ die Menge aller Spieler und Σ_0 der Stamm. Wir befassen uns vorerst mit den Spielern $v \in \Sigma_0$. Hier gilt eine Zerlegung

$$P_v(t + 1, t) = A_{v0}(t) P_v(t, 0) M_v(t)$$

mit passenden $M_v(t)$ und exponentiell-konvergentem $A_{v0}(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_{v0}(t) = A_{v0} \quad (\text{exponentiell}).$$

Durch Induktion gewinnen wir eine Darstellung

$$(5.4) \quad P_v(t, s) = A_{v0}(t - 1) A_{v0}(t - 2) \dots A_{v0}(s) P_v(s, 0) M_v(t, s) \quad (t > s > 0)$$

mit passenden $M_v(t, s)$. Insbesondere ist für ganzes $d > 0$

$$P_v((t + 1)\bar{d}, t\bar{d}) = B_{v0}(t) P_v(t\bar{d}, 0) N_v(t)$$

mit passenden $N_v(t)$ und $B_{v0}(t) = A_{v0}((t + 1)\bar{d} - 1) A_{v0}((t + 1)\bar{d} - 2) \dots A_{v0}(t\bar{d})$, d. h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B_{v0}(t) = A_{v0}^{\bar{d}} \quad (\text{exponentiell}).$$

Man kann $\bar{d}$ so wählen, daß $A_{v0}^{d\bar{k}}$ ($k = 1, 2, \dots$) exponentiell konvergiert. Wir sehen also: Wir können uns die eingangs erwähnte Vergrößerung gleich soweit getrieben denken, daß für $v \in \Sigma_0$ die Folgen A_{v0}^k ($k = 1, 2, \dots$) exponentiell konvergieren. Dies setzen wir von jetzt ab stets voraus. Damit wird auch der durch

$$Q_v(t, s) = A_{v0}(t - 1) \dots A_{v0}(s) \quad (t \geq s > 0)$$

definierte Prozeß exponentiell konvergent (Satz 5.3).

2. Es gibt ϑ, K mit $0 < \vartheta < 1$ und $K > 0$, derart, daß für $v \in \Sigma_0$

$$||P_v(t, s) - P_v(s, 0) M_v(t, s)|| \leq \vartheta^s \quad (t \geq s > K)$$

gilt.

Beweis. Für $t \geq s > L > 0$ gilt

$$\begin{aligned} P_v(s, 0) &= P_v(s, L) P_v(L, 0) \\ &= Q_v(s, L) P_v(L, 0) M_v(L, 0) P_v(L, 0). \end{aligned}$$

Wir haben deshalb

$$\begin{aligned} \|P_v(t, s) - P_v(s, 0) M_v(t, s)\| &= \|Q_v(t, s) P_v(s, 0) M_v(t, s) - P_v(s, 0) M_v(t, s)\| \\ &\leq \|Q_v(t, s) P_v(s, 0) - P_v(s, 0)\| \\ &\leq \|Q_v(t, s) Q_v(s, L) - Q_v(s, L)\| \\ &= \|Q_v(t, L) - Q_v(s, L)\|. \end{aligned}$$

Nach Nr. 1 folgt die Behauptung.

3. Ist $t_k \rightarrow \infty$, $s_k \rightarrow \infty$, $P_v(t_k, 0) \rightarrow P'_v$, $P_v(s_k, 0) \rightarrow P''_v$, $v \in \Sigma_0$, so gilt $P'_v \mathfrak{B}_v = P''_v \mathfrak{B}_v$, m. a. W. die Menge $P'_v \mathfrak{B}_v$ ist von der Wahl der Folge t_k unabhängig. Wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{B}_{v,0}$. $\mathfrak{B}_{v,0}$ ist ein in $\mathfrak{B}$ enthaltenes Simplex der Weite 2 (d. h. mit paarweise trägerfremden Ecken).

Beweis. Man kann durch Übergang zu Teilfolgen $t_k > s_k$ ($k = 1, 2, \dots$) erreichen. Dann ist

$$\begin{aligned} |P_v(s_k, 0) \mathfrak{B}_v, P_v(t_k, 0) \mathfrak{B}_v| \\ &= |P_v(s_k, 0) \mathfrak{B}_v, P_v(t_k, s_k) P_v(s_k, 0) \mathfrak{B}_v| \\ &\leq |P_v(s_k, 0) \mathfrak{B}_v, P_v(s_k, 0) M_v(t_k, s_k) P_v(s_k, 0) \mathfrak{B}_v| + \vartheta^k \\ &\leq |P_v(s_k, 0) \mathfrak{B}_v, P_v(s_k, 0) \mathfrak{B}_v| + \vartheta^k = \vartheta^k \end{aligned}$$

nach Nr. 2 sobald $s_k > K$ erreicht ist. Im Limes folgt hieraus $|P'_v \mathfrak{B}_v, P''_v \mathfrak{B}_v| = 0$. Aus Symmetriegründen gilt auch $|P'_v \mathfrak{B}_v, P''_v \mathfrak{B}_v| = 0$, woraus wegen der Abgeschlossenheit der beteiligten Mengen $P'_v \mathfrak{B}_v = P''_v \mathfrak{B}_v$ folgt.

Nach Nr. 2 gilt für $t \geq s > K$

$$(5.5) \quad \|P_v(t, 0) - P_v(s, 0) M_v(t, s) P_v(s, 0)\| \leq \vartheta^s.$$

Sorgen wir (Teilfolge!) auch noch für $M_v(t_k, s_k) \rightarrow M_v$, so kommt $P'_v = P''_v M_v P'_v$, und damit

$$\mathfrak{B}_{v,0} = P'_v \mathfrak{B}_v = P''_v M_v P'_v \mathfrak{B}_v = P''_v M_v \mathfrak{B}_{v,0} \subseteq P''_v M_v \mathfrak{B}_v \subseteq P''_v \mathfrak{B}_v = \mathfrak{B}_{v,0}.$$

Hier gilt also überall Gleichheit:

$$\mathfrak{B}_{v,0} = P''_v M_v \mathfrak{B}_{v,0} = P''_v M_v \mathfrak{B}_v.$$

Aus der Theorie der stationären Prozesse [7] folgt nun die Behauptung.

4. Für $v \in \Sigma_0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |P_v(t, s) \mathfrak{B}_v, \mathfrak{B}_{v,0}| = 0 \quad (\text{exponentiell}).$$

Beweis. Es ist $P_v(t, s) \mathfrak{B}_v \supseteq P_v(t, 0) \mathfrak{B}_v \supseteq P_v(t, 0) M_v(u, P_v t)(t, 0) \mathfrak{B}_v$, und dies liefert

$$|P_v(t, s) \mathfrak{B}_v, \mathfrak{B}_{v,0}| \leq |P_v(t, 0) M_v(u, t) P_v(t, 0) \mathfrak{B}_v, \mathfrak{B}_{v,0}| \quad (u > t > K).$$

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ kann man $u > t$ so bestimmen, daß weiter gilt:

$$\begin{aligned} &< |P_v(t, 0) M_v(u, t) P_v(t, 0) \mathfrak{B}_v, P_v(u, 0) \mathfrak{B}_v| + \varepsilon \\ &\leq \vartheta^t + \varepsilon. \quad [\text{nach (5.5)}]. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$|P_v(t, s) \mathfrak{B}_v, \mathfrak{B}_{v0}| \leq \theta' \quad \text{q. c. d.}$$

5. Für $v \in \Sigma_0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ||P_v(t, 0) \mathfrak{B}_v, \mathfrak{B}_{v0}|| = 0.$$

Beweis. Aus Nr. 4 folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |P_v(t, 0) \mathfrak{B}_v, \mathfrak{B}_{v0}| = 0 \quad (\text{exponentiell}).$$

Daß auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathfrak{B}_{v0}, P_v(t, 0) \mathfrak{B}_v| = 0$$

gilt, ist mittels Nr. 3 leicht indirekt zu sehen.

6. Wir wenden uns nun auch den Spielern $v \in \Sigma - \Sigma_0$ zu. Für sie besteht eine Zerlegung

$$(5.6) \quad P_\mu(t+1, 0) = A_{\mu 0}(t) P_v(t, 0) M_\mu(t, 0)$$

mit passenden $v \in \Sigma_0$ und $M_\mu(t, 0)$. Es gilt etwa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_{\mu 0}(t) = A_{\mu 0} \quad (\text{exponentiell}).$$

Wir setzen $\mathfrak{B}_{\mu 0} = A_{\mu 0} \mathfrak{B}_{v0}$. Damit ist $\mathfrak{B}_{\mu 0}$ für alle $\mu \in \Sigma$ definiert. Es gilt:

Sämtliche $\mathfrak{B}_{\mu 0}$ ($\mu \in \Sigma$) sind Simplizes der Weite 2 (d.h. mit paarweise trägerfremden Ecken). Sie haben sämtlich gleichviele Ecken — sagen wir: r Stück. Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ||P_\mu(t, 0) \mathfrak{B}_\mu, \mathfrak{B}_{\mu 0}|| = 0 \quad (\mu \in \Sigma).$$

Beweis. Ist $\mu \in \Sigma - \Sigma_0$, so können wir $v \in \Sigma_0$ wie oben bestimmen. Nach den in Nr. 1 erreichten Voraussetzungen gibt es neben (5.6) auch eine Zerlegung

$$(5.7) \quad P_v(t+2, 0) = B_v(t+1) P_\mu(t+1, 0) C_v(t+1).$$

Wir sorgen nun für

$$(5.8) \quad \begin{cases} P_v(t_k, 0) \rightarrow P_v, & P_v(t_k+2, 0) \rightarrow P'_v, & M_\mu(t_k, 0) \rightarrow M_\mu \\ B_v(t_k+1) \rightarrow B_v, & C_v(t_k+1) \rightarrow C_v \end{cases}$$

und haben wegen (5.6) $P_\mu(t_k+1, 0) \rightarrow A_{\mu 0} P_v M_\mu = P'_\mu$. Aus (5.7), (5.8) und Nr. 5 ergibt sich:

$$(5.9) \quad P'_\mu \mathfrak{B}_\mu = A_{\mu 0} P_v M_\mu \mathfrak{B}_\mu \subseteq A_{\mu 0} P_v \mathfrak{B}_v = A_{\mu 0} \mathfrak{B}_{v0} = \mathfrak{B}_{\mu 0}$$

$$(5.10) \quad \mathfrak{B}_{v0} = P'_v \mathfrak{B}_v = B_v P'_\mu C_v \mathfrak{B}_v \subseteq B_v P'_\mu \mathfrak{B}_\mu \subseteq B_v \mathfrak{B}_{\mu 0} = B_v A_{\mu 0} \mathfrak{B}_{v0}.$$

Hat $\mathfrak{B}_{v0}$ r Ecken, so hat $B_\mu A_{\mu 0} \mathfrak{B}_{v0}$ höchstens r Ecken und höchstens die Weite 2, enthält aber ein Simplex mit r Ecken und der Weite 2. Nach dem Lemma (§ 4) gilt also in (5.10) überall Gleichheit. Per definitionem hat $\mathfrak{B}_{\mu 0}$ höchstens r Ecken und höchstens die Weite 2, und dasselbe gilt für $B_v \mathfrak{B}_{\mu 0}$.

Wegen $\mathfrak{R}_{\mathbf{0}} = B_r \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}$ hat $B_r \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}$ genau r Ecken und die Weite 2 und dasselbe gilt für $\mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}$. Analog folgt die Gleichheit in (5.9). Da man vor der Erzwingung der Konvergenzen (5.8) stets für die Konvergenz von $P_\mu(t_k + 1, 0)$ sorgen kann, folgert man leicht:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|P_\mu(t, 0) \mathfrak{R}_\mu, \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}\| = 0.$$

Durch völlig analoge Betrachtungen wie oben zeigt man, daß alle $\mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}$ r Ecken besitzen; q. e. d.

7. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $T(\varepsilon) > 0$ mit

$$(5.11) \quad \|P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_\mu, \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}\| < \varepsilon \quad (t > s \geq T(\varepsilon), \mu \in \Sigma)$$

$$(5.12) \quad \|P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}, \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}\| < \varepsilon$$

Beweis. Sei $\mu \in \Sigma$. Zunächst ist (5.11) fast trivial. Wir wählen $A(\varepsilon) > 0$ derart, daß

$$(5.13) \quad \|P_\nu(s, 0) \mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (s \geq A(\varepsilon))$$

gilt. Für $t > s \geq A(\varepsilon)$ hat man dann

$$\|P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}, \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}\| \leq \|P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}, P_\mu(t, s) P_\mu(s, 0) \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}\| + \|P_\mu(t, 0) \mathfrak{R}_\mu, \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}\| < \varepsilon.$$

Wir schließen sogleich:

$$\|P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_\mu, \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}\| \leq \|P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}, \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}\| < \varepsilon.$$

Für beliebiges $\mu \in \Sigma$ haben wir eine Zerlegung

$$P_\mu(t, s) = A_\mu(t, s) P_\nu(s, 0) B_\mu(t, s)$$

mit passenden $A_\mu(t, s)$, $B_\mu(t, s)$, ν . Aus (5.13) folgt

$$\begin{aligned} & |A_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\nu \mathbf{0}}, P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_\mu| \\ & \leq |A_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\nu \mathbf{0}}, A_\mu(t, s) P_\nu(s, 0) \mathfrak{R}_\nu| + |A_\mu(t, s) P_\nu(s, 0) \mathfrak{R}_\nu, P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_\mu| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + |A_\mu(t, s) P_\nu(s, 0) B_\mu(t, s) \mathfrak{R}_\mu, P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_\mu| \\ & = \frac{\varepsilon}{2} \quad (t > s \geq A(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |A_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\nu \mathbf{0}}, \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}| & \leq |A_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\nu \mathbf{0}}, P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}| + |P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}, \mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}| \\ & \leq |A_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\nu \mathbf{0}}, P_\mu(t, s) \mathfrak{R}_\mu| + \varepsilon \\ & < \frac{3}{2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieraus entnehmen wir: $A_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\nu \mathbf{0}}$ ist ein Simplex mit höchstens r Ecken und einer Weite ≤ 2 . Nach dem Lemma (§ 4) hat $A_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\nu \mathbf{0}}$ genau r Ecken und es gilt

$$|\mathfrak{R}_{\mu \mathbf{0}}, A_\mu(t, s) \mathfrak{R}_{\nu \mathbf{0}}| < \frac{3\Gamma}{2} \varepsilon.$$

$A_\mu(t, s) \mathfrak{B}_{\nu 0}$ hat die Weite $2-3\varepsilon$. Daraus ergibt sich mit (5.13)

$$|\mathfrak{B}_{\mu 0}, P_\mu(t, s) \mathfrak{B}_\mu| < \frac{1}{2} (3\Gamma + 1) \varepsilon.$$

Für $T(\varepsilon) = A\left(\frac{2\varepsilon}{3\Gamma+1}\right)$ folgt daher die Behauptung.

Satz 5.5. *Jeder exponentiell-asymptotisch periodisch gesteuerte minimal-autarke Markoffsche n -Personen-Prozeß mit monomialer Regelung ist asymptotisch-periodisch.*

Beweis. Wir wählen ein später noch näher zu fixierendes $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Dann gilt für $t > s \geq T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)$

$$\|P_\mu(t, s) \mathfrak{B}_{\mu 0}, \mathfrak{B}_{\mu 0}\| < \frac{\varepsilon}{\Gamma}$$

Nach dem Lemma gibt es nach fixierter Numerierung $e_1'', \dots, e_r''$ der Ecken von $\mathfrak{B}_{\mu 0}$ Permutationsscharen $\pi_\mu(t, s)$ ($t > s \geq T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)$), derart, daß

$$\|P_\mu(t, s) e_\varrho'' - e_{\pi_\mu(t, s) \varrho}''\| < \varepsilon \quad \left(\varrho = 1, \dots, r; t > s \geq T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)\right)$$

gilt. Man verifiziert leicht:

$$\pi_\mu(t, s) = \pi_\mu(t, u) \pi_\mu(u, s) \quad \left(t > u > s \geq T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)\right).$$

Nun betrachten wir die Folge

$$A(t) = [\pi_1(t, s), \dots, \pi_n(t, s)] \quad (t = s+1, s+2, \dots)$$

für festes $s > T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right)$. Sie ist nur endlichvieler Werte fähig [höchstens $a = (r!)^n$], also gibt es zwei Werte t, u mit $t+a > u > t > s$ und $\pi_\mu(u, s) = \pi_\mu(t, s)$ ($\mu = 1, \dots, n$), d.h.

$$(5.14) \quad \pi_\mu(u, t) = 1 \quad (\mu = 1, \dots, n).$$

Hieraus folgt $\|P_\mu(u, t) e_\varrho'' - e_\varrho''\| < \varepsilon$ und somit $\|P_\mu(u, t) g - g\| < \varepsilon$ ($g \in \mathfrak{B}_{\mu 0}$). Benützen wir (5.13), so ergibt sich für $h \in \mathfrak{B}_\mu$, mit passendem $g \in \mathfrak{B}_{\mu 0}$

$$\begin{aligned} \|P_\mu(u, s) h - P_\mu(t, s) h\| &= \|P_\mu(u, t) P_\mu(t, s) h - P_\mu(t, s) h\| \\ &< \frac{2\varepsilon}{\Gamma} + \|P_\mu(u, t) g - g\| < \left(\frac{2}{\Gamma} + 1\right) \varepsilon \end{aligned}$$

d.h.

$$\|P_\mu(u, s) - P_\mu(t, s)\| < \left(\frac{2}{\Gamma} + 1\right) \varepsilon.$$

Nun wählen wir $\delta > 0$ mit $\delta < \frac{1}{2}$ beliebig und bestimmen nachträglich unser ε mit $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2\left(\frac{2}{\Gamma} + 1\right)}$, sowie ein $S(\delta)$ mit $S(\delta) > T\left(\frac{\varepsilon}{\Gamma}\right) > 0$ derart, daß

aus $\|P_\mu - Q_\mu\| < \left(\frac{2}{\Gamma} + 1\right) \varepsilon$ ($\mu = 1, \dots, n$) und $0 < k < a$ stets

$$\|f_{\mu k}^{(t)}(P_1, \dots, P_n) - f_{\mu k}^{(s)}(Q_1, \dots, Q_n)\| < \delta \quad (t, s \geq S(\delta), \mu = 1, \dots, n)$$

folgt. Wegen der in Nr. 1 bereits erreichten Konvergenz der Steuerung, und wegen der monomialen Gestalt der $f_{\mu k}^{(t)}$ ist dies stets erreichbar. War bei unserer obigen Überlegung von vornherein für $s \geq S(\delta)$ gesorgt, so ergibt sich aus (5.14)

$$\|P_{\mu}(u+k, u) - P_{\mu}(t+k, t)\| < \delta \quad (0 \leq k \leq a).$$

Setzen wir insbesondere $k=u-t$, so folgt

$$\begin{aligned} \|P_{\mu}(u+k, u) e_{\varrho}^{\mu} - e_{\varrho}^{\mu}\| &\leq \|P_{\mu}(u+k, u) e_{\varrho}^{\mu} - P_{\mu}(t+k, t) e_{\varrho}^{\mu}\| \\ &\quad + \|P_{\mu}(t+k, t) e_{\varrho}^{\mu} - e_{\varrho}^{\mu}\| < \delta + \varepsilon < 1, \end{aligned}$$

was nur mit $\pi_{\mu}(u+k, u) = \pi_{\mu}(t+2k, t+k) = 1$ ($\mu = 1, \dots, n$) vereinbar ist. Durch Iteration dieses Schlusses ergibt sich

$$\pi_{\mu}(t+p k, t+q k) = 1 \quad (\mu = 1, \dots, n; p > q > 0).$$

Hieraus folgt analog wie oben, daß für beliebiges $s > 0$

$$\|P_{\mu}(t+p k, s) - P_{\mu}(t+q k, s)\| < \delta \quad (t \geq S(\delta); p, q > 0)$$

gilt. Da $\delta > 0$ beliebig war, ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Nun ist die Geschwindigkeit der asymptotischen Annäherung abzuschätzen. Der nachstehende Satz gilt für beliebige Markoffsche Prozesse. Wir können uns etwa einen Spieler v fest herausgegriffen denken und lassen den Index v in der Diskussion dieses Satzes einfach weg.

Satz 5.6. *Der Markoffsche Prozeß $P(t, s)$ besitze nachstehende Eigenschaften: Für jedes s existiert*

$$(5.15) \quad P(\infty, s) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t, s).$$

Ferner existiert

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t+1, t)$$

und es gilt

$$P(\infty, s) \mathfrak{B} = P \mathfrak{B}.$$

Dann ist die Menge $P \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$ ein Simplex der Weite 2. Gilt

$$(5.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |P(t, s) \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_0| = 0 \quad (\text{exponentiell}),$$

so finden auch die Grenzübergänge (5.15) mit exponentieller Geschwindigkeit statt.

Beweis. 1. Aus $P(t+1, s) = P(t+1, t) P(t, s)$ folgt durch Grenzübergang

$$(5.17) \quad P(\infty, s) = P P(\infty, s)$$

und somit

$$\mathfrak{B}_0 = P(\infty, s) \mathfrak{B} = P P(\infty, s) \mathfrak{B} = P \mathfrak{B}_0 = P \mathfrak{B}.$$

Aus der Theorie der stationären Markoffschen Prozesse folgt dann: $\mathfrak{B}_0$ ist ein in $\mathfrak{B}$ enthaltenes Simplex mit paarweise trägerfremden Ecken $e_1, \dots, e_r$.

2. Sei $\mathfrak{B}_{\varrho}(s) = \{h | h \in \mathfrak{B}, P(\infty, s) h = e_{\varrho}\}$. Das ist eine konvexe kompakte Menge in $\mathfrak{B}$. Wählen wir $g_{\varrho}(0) \in \mathfrak{B}_{\varrho}(0)$ ($\varrho = 1, \dots, r$) beliebig, aber nunmehr fest, so ist das von den $g_{\varrho}(0)$ erzeugte Simplex $\mathfrak{B}(0)$ von der Weite 2. Setzen

wir $P(s, 0) \mathfrak{B}(0) = \mathfrak{B}(s)$, so ist

$$P(\infty, s) \mathfrak{B}(s) = \mathfrak{B}_0$$

und $\mathfrak{B}(s)$ ist ein Simplex der Weite 2, mit den Ecken $g_e(s) = P(s, 0)g_e(0)$, die $P(\infty, s)g_e(s) = e_e$ erfüllen. Zu jedem $h \in \mathfrak{B}$ gibt es ein $g \in \mathfrak{B}(s)$ mit $P(\infty, s)(h - g) = 0$, d. h.

$$(5.18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(\infty, t)(h - g) = 0.$$

Wir zeigen nun, daß diese Konvergenz exponentiell ist.

3. Sei $\mathfrak{F}(s) = \{h \mid P(\infty, s)h = 0\}$, $\mathfrak{E} = \{h \mid \|h\| \leq 1\}$, $\mathfrak{E}(s) = \mathfrak{F}(s) \cap \mathfrak{E}$, $P\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0$ (von $\mathfrak{B}_0$ erzeugt). Dann gilt

$$P(t, s) \mathfrak{E}(s) \subseteq \mathfrak{E}(t) \quad (t > s).$$

4. Es gilt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|P(\infty, s)h - h\| = 0 \quad (h \in \mathfrak{E}_0).$$

Es genügt, dies für $h \in \mathfrak{B}_0$ zu beweisen. Wir bestimmen $g \in \mathfrak{B}$ derart, daß $P(\infty, 0)g = h$ gilt, ferner $S(\varepsilon) > 0$ derart, daß

$$\|P(s, 0) - P(\infty, 0)\| < \varepsilon \quad (s \geq S(\varepsilon))$$

gilt. Für $s \geq S(\varepsilon)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|P(\infty, s)h - h\| &\leq \|P(\infty, s)h - P(\infty, s)P(s, 0)g\| \\ &\quad + \|P(\infty, 0)g - h\| \leq \|h - P(s, 0)g\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Allgemein ist

$$\|P(\infty, s)h - h\| \leq \varepsilon \|h\| \quad (s \geq S(\varepsilon), h \in \mathfrak{E}_0).$$

5. Ist $h \in \mathfrak{F}(s)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $s \geq S\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ und $|\mathfrak{E}_0, \{h\}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, so gilt

$$\|h\| < \varepsilon.$$

Für passendes $g \in \mathfrak{E}_0$ ist nämlich $\|h - g\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Es gilt

$$\|P(\infty, s)g - g\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \|g\|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|h\| &\leq \|g\| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \|P(\infty, s)g\| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \|g\| \\ &\leq \|P(\infty, s)g - P(\infty, s)h\| + \frac{\varepsilon}{3} (1 + \|g\|) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \left(1 + \|h\| + \frac{\varepsilon}{3}\right) \\ \frac{5}{6} \|h\| &\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) \|h\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \left(2 + \frac{\varepsilon}{3}\right) < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 6} \\ \|h\| &< \varepsilon \cdot \frac{13}{15} < \varepsilon. \end{aligned}$$

6. Aus $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $s > S\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, $|\mathfrak{B}_0, P(s+1, s)\mathfrak{B}| < \frac{\varepsilon}{3}$ folgt

$$P(s+1, s) \mathfrak{E}(s) \subseteq \varepsilon \mathfrak{E}(s+1),$$

denn für $\mathfrak{R} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{S}_0$ folgt

$$|\mathfrak{R}, P(s+1, s) \mathfrak{E}(s)| \leq |\mathfrak{R}, P(s+1, s) \mathfrak{E}| \leq |\mathfrak{B}_0, P(s+1, s) \mathfrak{B}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Somit gilt

$$|\mathfrak{S}_0, \{P(s+1, s) h\}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (h \in \mathfrak{E}(s))$$

also

$$||P(s+1, s) h|| < \varepsilon \quad (h \in \mathfrak{E}(s))$$

nach Nr. 5.

7. Für $s > S(\frac{1}{6})$ gilt

$$P(s+k, s) \mathfrak{E}(s) \subseteq \frac{1}{2^k} \mathfrak{E}(s+k) \quad (k=0, 1, \dots).$$

Hierzu ist Nr. 6 iteriert anzuwenden.

8. Es gilt

$$(5.19) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} ||\mathfrak{B}(t), \mathfrak{B}_0|| = 0 \quad (\text{exponentiell}).$$

Denn für $s > S(\frac{1}{6})$ gilt wegen Nr. 7 gewiß

$$|\mathfrak{B}(s+k), P(s+k, s) \mathfrak{B}| < \frac{2}{2^{k+1}}$$

d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathfrak{B}(t), P(t, s) \mathfrak{B}| = 0 \quad (\text{exponentiell}).$$

Kombinieren wir dies mit der Voraussetzung (5.16), so folgt zunächst

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathfrak{B}(t), \mathfrak{B}_0| = 0 \quad (\text{exponentiell}).$$

Aus dem Lemma folgt dann die Behauptung.

9. Nach dem Lemma folgt aus $||\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}(s)|| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma}$ ($s \geq T$), $P(s, t) \mathfrak{B}(t) = \mathfrak{B}(s)$ und $P(\infty, t) \mathfrak{B}(t) = \mathfrak{B}_0$ ($s \geq t \geq T$)

$$\left. \begin{aligned} ||P(s, t) h - h|| &< \varepsilon \\ ||P(s, t) h - P(\infty, t) h|| &< \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (h \in \mathfrak{B}(s)).$$

Aus Nr. 8 ergibt sich somit die exponentielle Konvergenz von $P(t, s) h$ für $h \in \mathfrak{B}(s)$. Berücksichtigt man (5.16) und Nr. 7, so folgt es für $h \in \mathfrak{B}$; damit ist der Satz bewiesen.

Beweis von Theorem I. Aus Satz 5.5 und den ihm vorangehenden Nr. 4 und Nr. 7 folgt, daß für die Spieler des Stammes Σ_0 in unserem Prozeß nach eventueller Vergrößerung alle Voraussetzungen von Satz 5.6 erfüllt sind: Für $v \in \Sigma_0$ ist $P_v(t, s)$ ein exponentiell-asymptotisch periodischer Prozeß. Wir wenden nun das in § 1 Nr. 4 angegebene Verfahren der Ausschöpfung durch Stämme an: die für $v \in \Sigma_0$ erhaltenen Prozesse werden zur Steuerung geschlagen und sodann unter den restlichen Spielern — sofern noch solche vorhanden sind — der neue Stamm Σ_1 (relativ zu $\Sigma - \Sigma_0$) gebildet. Für Σ_1 können wir alle bisherigen Betrachtungen wiederholen und so die exponentielle

Konvergenz weiterer Prozesse beweisen. Nach endlichvielen Wiederholungen bricht dies Verfahren ab und das Theorem I ist bewiesen.

§ 6. Allgemeine Prozesse

Mittels der Zerlegung der Spielermenge Σ in Satellitengürtel (§ 2) sind wir nun imstande, die Behandlung allgemeiner n -Personen-Prozesse auf den Fall der minimal-autarken Prozesse zurückzuführen.

Theorem II. *Jeder exponentiell-asymptotisch periodisch gesteuerte Markoffsche n -Personen-Prozeß mit monomialer Regelung ist exponentiell-asymptotisch periodisch.*

Beweis. Sei $\Sigma = \bigcup_{k=0}^s \bigcup_{r=1}^{r_k} \Sigma_{kr}$ die Ausschöpfung von Σ durch Satellitengürtel (§ 2). Wir vergrößern zunächst soweit, daß die Hintermann-Vordermann-Relation symmetrisch wird, d.h. daß die gegenseitigen Beeinflussungen der Prozesse explizit in den Regelungswörtern erscheinen (§ 2). Aus Theorem I folgt die exponentiell-asymptotische Periodizität der zu Spielern v aus dem 0-ten Satellitengürtel $\Sigma_0 = \bigcup_{r=1}^{r_0} \Sigma_{0r}$ gehörigen Prozesse; denn die Σ_{0r} sind minimal-autark. Durch Relativierung bezüglich Σ_0 entsteht ein exponentiell-asymptotisch periodisch gesteuerter Prozeß mit den Satellitengürteln $\Sigma_k = \bigcup_{r=1}^{r_k} \Sigma_{kr}$ ($k=1, \dots, s$). Jetzt sind die Σ_{1r} minimal-autark und die zugehörigen Prozesse exponentiell-asymptotisch periodisch. Führt man in dieser Weise fort, so hat man nach s -maliger Relativierung das Theorem II bewiesen.

Wir gehen noch etwas auf die Frage der Konvergenz (Stabilität) ein. Wir greifen zunächst wieder einen einzelnen Prozeß $P(t, s)$ heraus. Hinreichende Bedingungen dafür, daß der Durchmesser der Menge $P(t, 0) \mathfrak{B}$ gegen 0 geht, haben SIRAZDINOW [23] und SARYMSAKOW [22] angegeben, ohne weitere Voraussetzungen über den Prozeß zu machen. Ist der Prozeß Bestandteil eines n -Personen-Prozesses mit monomialer Regelung, so genügt es, daß $P(t, 0) \mathfrak{B}$ für irgendein t einen Durchmesser < 2 hat, um sicherzustellen, daß $\mathfrak{B}_0$ nur einen einzigen Punkt enthält, d.h. daß der Durchmesser von $P(t, s) \mathfrak{B}$ gegen 0 geht. Ist $n=1$, so folgt hieraus die Konvergenz des Prozesses (vgl. auch [7]). Man könnte hieraus die Hoffnung schöpfen wollen, daß bei stationären Steuerungen durch Einfluß auf die Steuerung „konforme Eingriffe“ (RÖPKE [20]), durch die etwa die strikte Positivität der Steuerungsmatrizen erzwungen würde] die Konvergenz des Gesamtprozesses (das asymptotische Aufhören der Konjunkturschwankungen) erreicht werden könnte. Daß dies bei monomial geregelten n -Personen-Prozessen nicht der Fall ist, zeigt das

Beispiel. Sei $n=2$ und $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ von derselben Dimension > 1 , so daß man jede Transformation in $\mathfrak{H}_1$ auch in $\mathfrak{H}_2$ anwenden darf (die Basen sind ja fixiert). Wir setzen kurzerhand $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}$. Seien h_1, h_2 zwei verschiedene Punkte in $\mathfrak{B}$, die keine Ecken von $\mathfrak{B}$ sind. Seien Q_1, Q_2 eindimensionale stochastische Projektionen mit $Q_1 \mathfrak{B} = h_1$, $Q_2 \mathfrak{B} = h_2$. Es gilt also $Q_i Q_k = Q_i$ ($i, k=1, 2$). Sei $f_1(P_1, P_2) = P_2$, $f_2(I_1', P_2) = P_1$. Wir betrachten

den 2-Personenprozeß mit dieser Steuerung und den Anfangswerten $P_1(1, 0) = Q_1$, $P_2(1, 0) = Q_2$. Dann ist $P_1(2, 0) = Q_2$, $P_2(2, 0) = Q_1$; $P_1(3, 0) = Q_1$, $P_2(3, 0) = Q_2$; ... Allgemein:

$$\begin{aligned} P_1(2t, 0) &= Q_2, & P_1(2t+1, 0) &= Q_1 \\ P_2(2t, 0) &= Q_1, & P_2(2t+1, 0) &= Q_2 \end{aligned} \quad (t=1, 2, \dots)$$

wie man durch Induktion beweist.

Literatur

- [1] ALEXANDROFF-HOPF: Topologie I. Berlin 1935. — [2] ALLEN, R. G. D.: Mathematical Economics. London 1957. — [3] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. I, II. Paris 1953. — [4] FELS, E.: Maß und Richtung: Zur Aggregation dreiwertiger Signalkonstellationen im Ifo-Konjunkturtestverfahren. Statist. Vjschr. **7**, 57–89 (1954). — [5] FÖHL, C.: Volkswirtschaftliche Regelkreise höherer Ordnung in Modelldarstellung, s. GEYER-OPPELT, S. 49–75 (1957). — [6] GEYER, H., u. W. OPPELT: Volkswirtschaftliche Regelungsvorgänge. München 1957. — [7] JACOBS, K.: Zur Theorie der Markoffschen Prozesse. Math. Ann. **133**, 375–389 (1957). — [8] JACOBS, K.: Fastperiodische diskrete Markoffsche Prozesse von endlicher Dimension. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **21**, 194–246 (1957). — [9] JACOBS, K.: Fastperiodische Markoffsche Prozesse. Math. Ann. **134**, 408–427 (1958). — [10] JACOBS, K.: Markoffsche Prozesse mit monomialer Selbststeuerung. Arch. d. Math. **8**, 298–308 (1957). — [11] JÖHR: Die Konjunkturschwankungen. Zürich-Tübingen 1952. — [12] KEYNES, J. M.: Allgemeine Theorie der Beschäftigung, des Zinses und des Geldes. Berlin 1955. — [13] KRYLOFF, N., et N. BOGOLIOUBOFF: La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non-linéaire. Ann. of Math. **38**, 65–113 (1937). — [14] LANGE LÜTKE, H., u. W. MARQUARDT: Das Konjunkturtestverfahren. Allg. Statist. Arch. **35**, 189–208 (1951). — [15] MINKOWSKI, H.: Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs. Ges. Abh. Bd. 2, 131–229. — [16] NASH, J.: Non-cooperative games. Ann. of Math. **54**, 286–295 (1951). — [17] NEUMANN, J. v., and O. MORGENSTERN: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton 1947. — [18] OPPELT, W.: Regelvorgänge in der Technik und ihre Darstellung, s. GEYER-OPPELT, S. 9–21 (1957). — [19] ONTOBY, J. C.: Ergodic Sets. Bull. Amer. Math. Soc. **58**, 116–136 (1952). — [20] RÖPKE, W.: Die Gesellschaftskrisis der Gegenwart. Zürich 1948. — [21] DOOB, J. L.: Stochastic Processes. New York 1953. — [22] SARYMSAKOW, T.: On the ergodic principle for nonstationary Markov chains. Doklady Akad. Nauk SSSR. (N. S.) **90**, 25–28 (1953) (Russ.). — [23] SIRAZDINOW, S.: The ergodic principle for nonstationary Markov chains. Doklady Akad. Nauk SSSR. (N. S.) **71**, 829–830 (1950) (Russ.).

München, Math. Institut der Universität

(Eingegangen am 4. November 1957)

Über Transformationen von Mannigfaltigkeiten der Dimensionsdifferenz 2

Von
JOSEF WEIER

Seien $n \geq 2$ eine ganze Zahl, P eine $(n+2)$ -dimensionale und Q eine n -dimensionale orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit. Ferner bezeichne f eine stetige Abbildung von P in Q . Dann kann man zeigen:

1. Es gibt zu f homotope Abbildungen g und g' von P in Q derart, daß die Menge A aller Punkte p aus P mit $g(p) = g'(p)$ ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder ist.

Wir wollen A auch den *Schnitt* von g und g' nennen. Seien K eine simpliziale Zerlegung von A , ferner $A_1, A_2, \dots$ die 2-Simplexe von K , α_i eine Orientierung von A_i und α_i der unten definierte *Grad* von α_i bezüglich (g, g') . Hierauf gilt:

2. Die ganzzahlige 2-Kette $\sum \alpha_i x_i$ ist ein Zyklus in bezug auf P und den Bereich der ganzen Zahlen.

Wie weit ist der Zyklus $\sum \alpha_i x_i$ durch f bestimmt? Zur Beantwortung dieser Frage seien h, h' zu f homotope Abbildungen, die Menge B aller Punkte p aus P mit $h(p) = h'(p)$ ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder, L eine simpliziale Zerlegung von B und mit Hilfe von L ein dem Zyklus $\sum \alpha_i x_i$ entsprechender Zyklus $\sum \beta_i y_i$ definiert. Wir wollen $\sum \alpha_i x_i$ und $\sum \beta_i y_i$ als *charakteristische Zyklen* von f bezeichnen. Dann gilt:

3. Alle charakteristischen Zyklen von f sind untereinander homolog, es ist also

$$\sum \alpha_i x_i \sim \sum \beta_i y_i$$

in bezug auf P und den Bereich der ganzen Zahlen.

Der letzte Satz verliert seine Gültigkeit, wenn man darin „homolog“ durch „homotop“ ersetzt. Von den vorstehenden Aussagen 1 bis 3 wird *im folgenden nur die zweite bewiesen*. Zur Entscheidung gewisser Fragen genügt es, statt des Zyklus $\sum \alpha_i x_i$ lediglich den geometrischen Schnitt A zu untersuchen. Das wird unten in einer Bemerkung zur Theorie der Abbildung von Sphären gezeigt.

1. Bemerkung zu einem Satz von Freudenthal

Sind i, k natürliche Zahlen, so bedeute wie üblich S^i eine i -dimensionale Sphäre und $\pi_k(S^i)$ die k -te Hurewiczsche Homotopiegruppe von S^i . Die Ordnungen der Gruppen $\pi_{i+2}(S^i)$, $i = 1, 2, \dots$ sind sämtlich bekannt. Es ist

$\pi_3(S^1) = 0$ und $\pi_4(S^2) = Z_2$. In [1] zeigte FREUDENTHAL, daß für alle ganzen Zahlen $i \geq 2$ die Gruppe $\pi_{i+2}(S_i)$ entweder Null oder zyklisch von der Ordnung 2 ist. Die Frage, welcher Fall vorliegt, beantwortete PONTRJAGIN in [3] dahin, daß $\pi_{i+2}(S_i) = 0$ für alle $i \geq 3$. Diesem Ergebnis lag jedoch ein Irrtum zugrunde. Es ist nämlich $\pi_{i+2}(S^i) = Z_2$ für alle $i \geq 2$, wie WHITEHEAD in [5] und PONTRJAGIN in [4] zeigten.

In seiner Arbeit [1] hat FREUDENTHAL den Satz bewiesen: Sind α, m, n natürliche Zahlen mit

$$\alpha + 2 < m \quad \text{und} \quad \alpha + 2 < n,$$

so gilt $\pi_{m+\alpha}(S^m) = \pi_{n+\alpha}(S^n)$. Mit anderen Worten hängt die Ordnung der Gruppe $\pi_i(S^k)$ bei hinreichend großer Dimension der Bildsphäre S^k nur von der Dimensionsdifferenz $i - k$ ab. Hieraus folgt offenbar:

THEOREM 1. *Sind α und m natürliche Zahlen, die die Ungleichung $\alpha + 2 < m$ erfüllen, und gilt $\pi_{m+\alpha}(S^m) = 0$, so ist $\pi_{i+\alpha}(S^i) = 0$ für alle natürlichen Zahlen $i > m$.*

Dieser Teil des Freudenthalschen Satzes ist verhältnismäßig leicht zugänglich, wie wir im vorliegenden Abschnitt zeigen wollen. Man kann Theorem 1 noch verschärfen:

THEOREM 2. *Ersetzt man in Theorem 1 die Beziehung $\alpha + 2 < m$ durch die Beziehung $\alpha + 2 \leq m$, so bleibt das in Rede stehende Theorem richtig.*

Wenn E ein Euklidischer Raum, A eine Teilmenge von E und a, b Punkte aus E , so bezeichne $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A bezüglich E , $d(A)$ den Durchmesser von A und $d(a, b)$ den Abstand der Punkte a, b . Die weiterhin auftretenden Simplexe sind gradlinig und bezüglich ihrer Trägerebene offen. Wenn B ein solches Simplex und x eine eindeutige simpliziale Abbildung von B in E , so heiße $x(B)$ Zelle und $x(\bar{B} - B)$ Sphäre.

Wir wollen zunächst zeigen, daß Theorem 2 aus dem nachstehenden Theorem 3 folgt. Hierzu seien α, m natürliche Zahlen mit

$$\alpha + 2 \leq m \quad \text{und} \quad \pi_{m+\alpha}(S^m) = 0.$$

Weiter bedeute n eine natürliche Zahl $\geq m$, und es sei bereits bewiesen, daß $\pi_{i+\alpha}(S^i) = 0$ für $i = m, \dots, n$. Dann ergibt sich $\pi_{n+1+\alpha}(S^{n+1}) = 0$ wie folgt.

Seien $S = S^{n+1+\alpha}$, $T = S^{n+1}$, t ein Punkt aus T und f eine stetige Abbildung von S in T . Nach Theorem 3 existiert eine zu f homotope Abbildung g von S in T , so daß die Menge $(g)^{-1}(t)$ aus einem einzigen Punkt a besteht. Hierauf seien U ein $(n+1+\alpha)$ -Simplex in S , V ein $(n+1)$ -Simplex in T und

$$a \in U, \quad g(\bar{U}) \subset V.$$

Für jeden Punkt p aus $\bar{U} - U$ bedeute $h(p)$ die Projektion von $g(p)$ auf $\bar{V} - V$ aus t . Wegen $\pi_{n+\alpha}(S^n) = 0$ ist die Abbildung h unwesentlich. Daher existiert eine stetige Abbildung h' von $\bar{U}$ in $\bar{V} - t$, die auf $\bar{U} - U$ mit g übereinstimmt. Die durch $f'|S - U = g|S - U$ und $f'|\bar{U} = h'$ bestimmte Abbildung gf' ist zu f homotop und unwesentlich.

Verbleibt zu zeigen:

THEOREM 3. Seien α und m natürliche Zahlen mit $\alpha + 2 \leq m$, ferner q ein Punkt aus S^m und f eine stetige Abbildung von $S^{m+\alpha}$ in S^m . Dann existiert eine zu f homotope Abbildung f' von $S^{m+\alpha}$ in S^m derart, daß die Menge $(f')^{-1}(q)$ aus einem einzigen Punkt besteht.

Um vom Thema dieser Arbeit nicht zu weit abzuschweifen, sei der Beweis des letzten Theorems nur skizziert. Man kann annehmen, daß $(f)^{-1}(q) \neq S^{m+\alpha}$. Daher genügt es, statt Theorem 3 zu beweisen:

Seien S ein $(m-\alpha)$ -Simplex, $T = S^m$ und f eine stetige Abbildung von $\bar{S}$ in T mit $f(\bar{S} - S) \subset T - q$. Dann kann man f unter Festhaltung auf $\bar{S} - S$ in eine Abbildung f' von $\bar{S}$ in T deformieren, so daß die Menge $(f')^{-1}(q)$ aus einem einzigen Punkt besteht.

Das ergibt sich wie folgt. Zunächst kann man f unter Festhaltung auf $\bar{S} - S$ in eine Abbildung f^* von $\bar{S}$ in T deformieren derart, daß $(f^*)^{-1}(q)$ eine (nicht notwendig zusammenhängende) α -dimensionale geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit A ist. Seien K eine simpliziale Zerlegung von A , β die Anzahl der α -Simplexe von K und j eine ganze Zahl mit $0 \leq j < \beta$.

Dann machen wir die für $j=0$ richtige Annahme, es existierte eine zu f homotope Abbildung f^j von $\bar{S}$ in T derart, daß über die Menge $(f^j)^{-1}(q) = A^j$ gilt: Es ist A^j ein homogenes α -dimensionales endliches Euklidisches Polyeder; es besitzt A^j eine simpliziale Zerlegung K^j , die höchstens $\beta - j$ Simplexe der Dimension α hat; jedes $(\alpha-1)$ -Simplex aus K^j ist Seite von wenigstens zwei α -Simplexen aus K^j .

Seien hierauf B ein $(\alpha-1)$ -Simplex aus K^j und $C_1 \neq C_2$ Simplexe der Dimension α aus K^j mit B als Seite. Bedeute E die von $C_1 + C_2$ aufgespannte Hyperebene. Durch eine kleine Verschiebung der zu $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$ fremden Eckpunkte von K^j läßt sich erreichen, daß jeder zu $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$ fremde Eckpunkt des verschobenen Komplexes in $S - E$ liegt: Man kann weiterhin annehmen, jeder zu $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$ fremde Eckpunkt aus K^j liege in $S - E$. Von der Voraussetzung, daß $\alpha + 2 \leq m$, wird an dieser Stelle nur der Teil $2 \leq m$ benötigt.

Nun seien $b_1, b_2, \dots$ die in E liegenden Eckpunkte von K^j , b ein Punkt aus B und $b_i^\tau = (1-\tau)b_i + \tau b$ für alle Zahlen τ . Bedeutet e einen Eckpunkt aus B mit $e \notin E$, so sei $\varphi^\tau(e) = e$. Wenn e ein Eckpunkt aus K^j mit $e = b_i$, so sei $\varphi^\tau(e) = b_i^\tau$. Für alle $0 \leq \tau < 1$ bedeute dann L^τ den simplizialen Komplex $\varphi^\tau(K^j)$, und es sei B^τ das zu L^τ gehörige Euklidische Polyeder. Offenbar sind K^j und L^τ für $0 \leq \tau < 1$ zueinander isomorph.

Man überlegt sich nun leicht, daß von τ stetig abhängende stetige Abbildungen g^τ , $0 \leq \tau < 1$, von $\bar{S}$ in T existieren, die die Eigenschaften haben:

$$f^j = g^0, \quad (g^\tau)^{-1}(q) = B^\tau \quad \text{für} \quad 0 \leq \tau < 1,$$

in allen (p, τ) mit $p \in \bar{S} - S$ und $0 \leq \tau < 1$ ist $f^j(p) = g^\tau(p)$.

Es ist $\dim E \cdot \bar{S} \leq \alpha + 1$ und nach Voraussetzung $\alpha + 2 \leq m$. Man kann daher annehmen, es existiere ein in T gelegenes m -Simplex V mit

$$f^j(E \cdot \bar{S}) \subset V.$$

Hieraus ergibt sich leicht die Möglichkeit, die Deformation $\{g^\tau\}$ so auszuführen, daß $g^\tau(E \cdot \bar{S}) \subset V$ für $0 \leq \tau < 1$.

Da $E \cdot \bar{S}$ kompakt und V offen, existiert eine in $\bar{S}$ offene Menge U mit $E \cdot \bar{S} \subset U$ derart, daß statt $g^\tau(E \cdot \bar{S}) \subset V$ sogar

$$g^\tau(\bar{U}) \subset V \quad \text{für} \quad 0 \leq \tau < 1.$$

Hierauf braucht man nur für jeden Punkt p aus U den Punkt $g^\tau(p)$ auf der Strecke zwischen $g^\tau(p)$ und q passend zu verschieben, um von τ stetig abhängende stetige Abbildungen γ^τ , $0 \leq \tau < 1$, von $\bar{S}$ in T zu erhalten, die die gleichen Eigenschaften wie die Abbildungen g^τ haben [für die also $f^j = \gamma^0$, $(\gamma^\tau)^{-1}(q) = B^\tau$ in allen τ und $f^j(p) = \gamma^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \bar{S} - S$ und $0 \leq \tau < 1$ ist] und für die überdies gilt: die durch $\gamma(p, \tau) = \gamma^\tau(p)$ bestimmte Abbildung γ ist auf der Menge aller (p, τ) mit $p \in \bar{S}$ und $0 \leq \tau < 1$ gleichmäßig stetig.

Wenn e ein Eckpunkt aus K^j , so sei $\varphi^1(e) = e$ für $e \notin E$ und $\varphi^1(e) = b$ für $e \in E$. Es bezeichne K^{j+1} den simplizialen Komplex $\varphi^1(K^j)$ und A^{j+1} das zu K^{j+1} gehörende Polyeder. Hierauf überlegt man sich leicht, daß man annehmen kann, es sei

$$\lim (\gamma^\tau(p), \tau \text{ gegen } 1) \neq q$$

in allen Punkten p aus $\bar{S} - A^{j+1}$. Um den $(j+1)$ -ten Schritt zu Ende zu führen, braucht man alsdann nur noch $f^{j+1}(p) = \lim (\gamma^\tau(p), \tau \text{ gegen } 1)$ in allen Punkten p aus $\bar{S}$ zu setzen.

Somit kann man f unter Festhaltung auf $\bar{S} - S$ in eine Abbildung f^{**} von $\bar{S}$ in T deformieren derart, daß die Menge $(f^{**})^{-1}(q)$ endlich. Wegen $\dim T > 1$ lassen sich die endlich vielen Punkte dieser letzteren Menge leicht auf einen Punkt zusammenziehen.

2. Der verallgemeinerte Brouwersche Grad

Seien $n \geq 2$ eine ganze Zahl und P, Q orientierbare geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten, $\dim P = n+2$, $\dim Q = n$, P^* eine Orientierung von P , Q^* eine Orientierung von Q , A ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder und f, g stetige Abbildungen von P in Q . Die Menge aller Punkte p aus P mit $f(p) = g(p)$ sei gleich A . Die so erklärte Bedeutung von $n, P, Q, P^*, Q^*, A, f, g$ gelte bis zum Schluß der vorliegenden Arbeit.

Nun bezeichne B ein in A gelegenes 2-Simplex und B^* eine Orientierung von B . Es seien b ein Punkt aus B , q der Punkt $f(b) = g(b)$, weiter C ein n -Simplex in P , D ein n -Simplex in Q und

$$b \in C, \quad A \cdot \bar{C} = b, \quad f(\bar{C}) + g(\bar{C}) \subset D.$$

Dann gibt es $n+2$ linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_{n+2}$ in P mit b als Anfangspunkt und

$$v_i \in B \quad \text{für} \quad i \leq 2, \quad v_i \in C \quad \text{für} \quad i > 2$$

derart, daß (v_1, v_2) die Orientierung B^* von B und $(v_1, \dots, v_{n+2})$ die Orientierung P^* von P bestimmen. Seien C^* die durch $(v_3, \dots, v_{n+2})$ bestimmte Orientierung von C und D^* die von Q^* in D induzierte Orientierung, ferner S die von C^* in $\bar{C} - C$ und T die von D^* in $\bar{D} - D$ induzierte Orientierung. Für jeden Punkt p aus $\bar{C} - C$ bezeichne $h(p)$ die Projektion des Punktes

$$q + (f(p) - g(p))$$

auf $\bar{D} - D$ mit q als Projektionszentrum. Alsdann heiße der Brouwersche Grad (vgl. [2], [6] bis [8]) der Transformation

$$h: S \rightarrow T$$

der Grad von B^* in bezug auf (f, g) .

3. Der zyklische Charakter zweidimensionaler Schnitte

Bezeichnet im folgenden x ein orientiertes Simplex, so sind $\dot{x}$ die Randkette von x und $|x|$ das zu x gehörige nichtorientierte Simplex. Die Bedeutung von n, P, Q, P^*, Q^*, A, f und g ist schon im zweiten Abschnitt erklärt. Dabei sind die Abbildungen f und g nicht notwendig homotop. Der nachfolgende Satz 4 stellt also eine Verschärfung der Aussage 2 der Einleitung dar.

THEOREM 4. *Seien K eine simpliziale Zerlegung von A und A_i die 2-Simplexe von K , ferner x_i eine Orientierung von A_i und α_i der Grad von x_i bezüglich (f, g) . Dann ist $\sum \alpha_i x_i$ ein Zyklus in bezug auf P und den Bereich der ganzen Zahlen.*

Beweis. Seien $B_{i1}, B_{i2}, \dots$ die 1-Seiten von A_i und y_{ik} die von x_i in B_{ik} induzierte Orientierung. Dann ist $\dot{x}_i = y_{i1} + y_{i2} + y_{i3}$, mithin

$$(\sum \alpha_i x_i)^* = \sum_i \sum_k \alpha_i y_{ik}.$$

Weiter seien $B_1, B_2, \dots$ die 1-Simplexe von K und $z_{i1}, z_{i2}, \dots$ die durch

$$|y_{jl}| = B_i$$

bestimmten y_{jl} . Entsprechen dabei z_{ik} und y_{jl} einander, so sei

$$\xi(i, k) = j.$$

Dann stellt die Gleichung

$$(\sum \alpha_i x_i)^* = \sum_i \sum_k \alpha_i \xi(i, k) z_{ik}$$

lediglich eine Umordnung der Gleichung $(\sum \alpha_i x_i)^* = \sum \sum \alpha_i y_{ik}$ dar.

Die Gleichung $(\sum \alpha_i x_i)^* = 0$ ist offenbar richtig, wenn für alle Zahlen i die Gleichung

$$\sum_k \alpha_i \xi(i, k) z_{ik} = 0$$

gilt. Seien y_i eine Orientierung von B_i und ε_{ik} gleich 1 oder -1 , je nachdem y_i und z_{ik} gleich orientiert sind oder nicht. Dann genügt es, statt der letzten

Gleichung nachzuweisen, daß

$$\sum_k \alpha_{\xi(i,k)} \varepsilon_{ik} = 0$$

für alle i . Diese Gleichung ist aber nach den folgenden Theoremen 5 und 6 richtig, da die Zahl $\alpha_{\xi(i,k)} \varepsilon_{ik}$ gerade der Koeffizient ist, mit dem y_i in der Randkette von $\alpha_j x_j$ auftritt.

THEOREM 5. *Seien A_1 ein in A gelegenes 2-Simplex, B eine 1-Seite von A_1 , die Menge $A_1 + B$ in A offen, ferner x eine Orientierung von A_1 und der Grad von x bei (f, g) . Dann ist $\alpha = 0$.*

Beweis. Wie man sich leicht überlegt, existieren von τ stetig abhängende n -Simplexe C^τ , $0 \leq \tau \leq 1$, in P , so daß $A \cdot \bar{C}^\tau = 0$ für $\tau < 1$, ferner A zu $\bar{C}^1 - C^1$ fremd und der Durchschnitt $A \cdot C^1$ ein Punkt q aus B ist. Sei $r = f(q) = g(q)$. Offenbar kann man annehmen, es existiere ein in Q gelegenes n -Simplex $D \ni r$. Die C^τ lassen sich als so klein gewählt annehmen, daß die Menge $f(\bar{C}^\tau) + g(\bar{C}^\tau)$ für alle τ in D liegt.

Für jeden Punkt p aus $\bar{C}^1 - C^1$ bedeute $h(p)$ die Projektion des Punktes $r + (f(p) - g(p))$ auf $\bar{D} - D$ mit r als Projektionszentrum. Bezeichnen dann S eine Orientierung von $\bar{C}^1 - C^1$, T eine Orientierung von $\bar{D} - D$ und β den Brouwerschen Grad der Abbildung $h: S \rightarrow T$, so ist

$$|\alpha| = |\beta|.$$

Da $\bar{C}^\tau$ zu A fremd für $\tau < 1$, ist $f(p) \neq g(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \bar{C}^\tau$ und $\tau < 1$. Somit ist h eine unwesentliche Abbildung und daher $\alpha = 0$.

THEOREM 6. *Seien K eine simpliziale Zerlegung von A , B ein 1-Simplex aus K und $A_1, \dots, A_m$, $m > 1$, die 2-Simplexe aus K mit B als Seite, ferner x_i eine Orientierung von A_i , α_i der Grad von x_i bei (f, g) , weiter y_i die von x_i in B induzierte Orientierung und y eine Orientierung von B . Dann gilt*

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_m \varepsilon_m = 0,$$

wobei ε_i gleich 1 oder -1 , je nachdem y und y_i gleich orientiert sind oder nicht.

Beweis. Nach einer Bemerkung des vierten Abschnittes existieren in P von τ stetig abhängende n -Zellen C^τ ($0 \leq \tau \leq 1$) und von τ stetig abhängende Punkte q^τ ($0 \leq \tau \leq 1$), q_i^τ ($1 \leq \tau \leq 2$), $i = 2, \dots, m$, mit den im nächsten Absatz aufgezählten Eigenschaften.

Für $0 \leq \tau < 1$ ist $q^\tau \in A_1$. Der Punkt $q^1 = q_2^1 = \dots = q_m^1$ liegt in B . Für $1 < \tau \leq 2$ und $i = 2, \dots, m$ ist $q_i^\tau \in A_i$. Es ist

$$A \cdot (\bar{C}^\tau - C^\tau) = 0 \quad \text{für alle } \tau, \quad A \cdot C^\tau = a^\tau \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 1.$$

Für $1 < \tau \leq 2$ besteht die Menge $A \cdot C^\tau$ aus den Punkten $q_2^\tau, \dots, q_m^\tau$.

Man kann annehmen, daß ein in Q gelegenes n -Simplex D existiert mit $f(q^1) = g(q^1) \in D$. Wenn β eine positive Zahl, so steht nichts im Wege, die

C^τ so klein zu wählen, daß $d(C^\tau \cdot q^\tau) < \beta$ für alle τ . Somit kann man annehmen, es sei

$$f(\bar{C}^\tau) + g(\bar{C}^\tau) \subset D$$

für alle Zahlen τ mit $0 \leq \tau \leq 2$.

Offenbar existieren von τ stetig abhängende topologische Abbildungen t^τ , $0 \leq \tau \leq 2$, von $\bar{D}$ auf $\bar{C}^\tau$. Wir setzen $d^\tau = t^{-\tau}(q^\tau)$, $d_i^\tau = t^{-\tau}(q_i^\tau)$, für alle (p, τ) mit $p \in \bar{D}$ und $0 \leq \tau \leq 2$, weiter

$$\varphi^\tau(p) = f t^\tau(p) \quad \text{und} \quad \gamma^\tau(p) = g t^\tau(p).$$

Dann sind $\{q^\tau\}$ und $\{\gamma^\tau\}$ zwei Homotopien von $\bar{D}$ in sich mit den Eigenschaften: Für $0 \leq \tau \leq 1$ ist d^τ der einzige Übereinstimmungspunkt von $(\varphi^\tau, \gamma^\tau)$, für $1 < \tau \leq 2$ sind die Punkte $d_2^\tau, \dots, d_m^\tau$ die Übereinstimmungspunkte von $(\varphi^\tau, \gamma^\tau)$.

Es bedeute δ^τ die topologische Ordnung von d^τ bei $(\varphi^\tau, \gamma^\tau)$ und δ_i^τ die topologische Ordnung von d_i^τ bei $(\varphi^\tau, \gamma^\tau)$. Wegen der Deformationsinvarianz der topologischen Ordnung ist dann

$$\delta^\tau = \delta^0 \quad \text{für} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum \delta_i^\tau = \delta^0 \quad \text{für} \quad 1 < \tau \leq 2.$$

Aus den letzten Gleichungen ergibt sich Theorem 6 wie folgt.

Wir setzen $x_1^* = x_1$. Für $i > 1$ sei x_i^* eine Orientierung von A_i , so daß x_1^* und x_i^* in B entgegengesetzte Orientierungen induzieren. Für alle i bezeichne α_i^* den Grad von x_i^* bezüglich (f, g) . Wenn x_i und x_i^* entgegengesetzte Orientierungen von A_i sind, so ist $\alpha_i = -\alpha_i^*$. Mithin folgt die im obigen Theorem angegebene Gleichung aus

$$\alpha_1^* = \alpha_2^* + \dots + \alpha_m^*.$$

Die vorstehende Gleichung wiederum ist richtig, wenn eine ganze Zahl $\varepsilon \neq 0$ existiert mit

$$\alpha_1^* = \varepsilon \delta^0 \quad \text{und} \quad \alpha_i^* = \varepsilon \delta_i^2 \quad \text{für} \quad i > 1.$$

Diese letzteren Beziehungen folgen leicht aus der Definition des Grades, wie wir zeigen wollen.

Zunächst kann man wegen der topologischen Invarianz der Ordnung weiterhin annehmen, die Zellen C^τ seien zueinander parallele n -Simplexe. Dann bedeute D^* die von Q^* in D induzierte Orientierung. Diejenige Orientierung von C^0 , die nach der obigen Definition des Grades der Bestimmung von α_1^* zugrunde zu legen ist, heiße C^{0*} . Es bezeichne C^{2*} jene Orientierung von C^2 , in die C^{0*} vermöge der Homotopie $\{C^\tau\}$ überführt wird. Da x_1^* und x_i^* , $i > 1$, in B entgegengesetzte Orientierungen induzieren, ist C^{2*} diejenige Orientierung von C^2 , die nach der Definition des Grades für die Bestimmung von α_i^* zu benutzen ist.

Schließlich seien C_i^2 , $i = 2, \dots, m$, paarweise zueinander fremde in C^2 gelegene n -Simplexe derart, daß

$$A \cdot (\bar{C}_i^2 - C_i^2) = 0 \quad \text{und} \quad A \cdot C_i^2 = q_i^2 \quad \text{für} \quad i \geq 2.$$

Es bezeichne C_i^{2*} die von C^{2*} in C_i^2 induzierte Orientierung. Dann kann man (C^{0*}, D^*) der Bestimmung von α^* und (C_i^{2*}, D^*) für $i \geq 2$ der Bestimmung von α_i^* zugrunde legen. Hieraus aber folgt bereits die Existenz der Zahl ε . Offenbar ist ε gleich 1 oder -1 .

Damit ist Theorem 6 und also auch Theorem 4 bewiesen.

Wenigstens kurz wollen wir uns noch mit der Frage befassen, wie die obigen Definitionen im Falle *nichtorientierbarer* Mannigfaltigkeiten abzuwandeln sind. Hierzu seien R, S beliebige geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten mit $\dim R = n + 2$ und $\dim S = n$, ferner h eine stetige Abbildung von R in S . Dann existiert eine zu h homotope Abbildung h' von R in S derart, daß die Menge B aller Punkte p aus R mit $h(p) = h'(p)$ ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder ist. Es bezeichne B_0 ein in B gelegenes 2-Simplex. Diesem 2-Simplex kommt wie folgt ein Grad mod 2 zu. Seien C ein 2-Simplex in R , D ein n -Simplex in S ,

$$B \cdot (\bar{C} - C) = 0, \quad B \cdot C = B_0 \cdot C \neq 0, \quad h(\bar{C}) + h'(\bar{C}) \subset D$$

und $h^*(p)$ für jeden Punkt p aus $\bar{C} - C$ die Projektion von $h(p)$ auf $\bar{D} - D$ mit $h'(p)$ als Projektionszentrum. Es bedeute U eine Orientierung von $\bar{C} - C$ und V eine solche von $\bar{D} - D$. Ist dann β der Brouwersche Grad der Abbildung $h: U \rightarrow V$, so heiße $\beta \bmod 2$ der Grad mod 2 von B_0 in bezug auf (h, h') .

Hierauf seien L eine simpliziale Zerlegung von B und $B_1, B_2, \dots$ die 2-Simplexe von L , weiter β_i der Grad mod 2 von B_i . Dann stellt die Kette $\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \dots$ einen Zyklus mod 2 dar. Wenn h'' eine zu h homotope Abbildung, die Menge aller Punkte p aus S mit $h(p) = h''(p)$ ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder E und mit Hilfe von E ein dem Zyklus $\sum \beta_i B_i$ entsprechender Zyklus $\sum \varepsilon_i E_i$ gebildet ist, so sind die Zyklen $\sum \beta_i B_i$ und $\sum \varepsilon_i E_i$ bezüglich P homolog mod 2.

Versucht man, weiter zu verallgemeinern und etwa R, S durch kompakte topologische Mannigfaltigkeiten R', S' mit $\dim R' - (\dim S') + 2$ zu ersetzen, so stößt bereits der Nachweis, daß stets zweidimensionale Schnitte von der Art des oben definierten Polyeders A existieren, auf Schwierigkeiten.

4. Eine elementare Anmerkung

Wie oben bezeichne A ein homogenes zweidimensionales endliches Euklidisches Polyeder und $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Es seien E ein $(n + 2)$ -dimensionaler Euklidischer Raum $\supset A$, ferner K eine simpliziale Zerlegung von A , B ein 1-Simplex aus K und $A_1, \dots, A_m, m > 1$, die 2-Simplexe aus K mit B als Seite.

Dann existieren in E von τ stetig abhängende n -Zellen $C^\tau, 0 \leq \tau \leq 2$, sowie von τ stetig abhängende Punkte $a_i^\tau, 0 \leq \tau \leq 1$, und $a_i^\tau, 1 \leq \tau \leq 2, i = 2, \dots, m$, mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} a^\tau &\in A_1 \quad \text{für} \quad 0 \leq \tau < 1, & a^1 &= a_2^1 = \dots = a_m^1 \in B, \\ a_i^\tau &\in A_i \quad \text{für} \quad 1 < \tau \leq 2 \quad \text{und} \quad i = 2, \dots, m, \\ A \cdot (\bar{C}^\tau - C^\tau) &= 0 \quad \text{für} \quad \text{alle } \tau, \end{aligned}$$

für $0 \leq \tau \leq 1$ ist $A \cdot C^\tau = a^\tau$, für $1 < \tau \leq 2$ besteht die Menge $A \cdot C^\tau$ aus den Punkten $a_2^\tau, \dots, a_m^\tau$.

Nach der im ersten Abschnitt gegebenen Erklärung einer Zelle sind die C^τ nicht notwendig konvex. Bezeichnet daher F die von $\sum A_i$ aufgespannte Hyperebene, so kann man annehmen, daß F dreidimensional und in F zwei zueinander fremde offene Halbräume F_1, F_2 existieren mit

$$\bar{F}_1 + F_2 = F, \quad A_1 \subset F_1, \quad B \subset \bar{F}_1 \cdot \bar{F}_2, \quad A_i \subset F_2 \quad \text{für} \quad i \geq 2.$$

Sei $a^1 = a_2^1 = \dots = a_m^1$ ein Punkt in B .

Sind dann δ eine hinreichend kleine positive Zahl und U die bezüglich E gebildete offene δ -Umgebung von a^1 , so ist

$$A \cdot \bar{C}^\tau = (\sum A_i + B) \cdot \bar{C}^\tau.$$

Alsdann existieren in $F \cdot U$ von τ stetig abhängende 1-Simplexe C_1^τ , $0 \leq \tau \leq 2$, mit den Eigenschaften:

$$A \cdot (\bar{C}_1^\tau - C_1^\tau) = 0 \quad \text{für alle } \tau,$$

für $0 \leq \tau < 1$ ist $A \cdot C_1^\tau$ ein Punkt a^τ aus A_1 ; weiter $A \cdot C_1^1 = a^1$; für $1 < \tau \leq 2$ besteht $A \cdot C_1^\tau$ aus $m-1$ Punkten $a_2^\tau, \dots, a_m^\tau$, die beziehungsweise in $A_2, \dots, A_m$ liegen; die C_1^τ sind untereinander parallel und haben sämtlich die gleiche Länge.

Wenn p_0, p_1 die Eckpunkte von C_1^0 , so gibt es in $U - F$ Punkte $p_2, \dots, p_n$ derart, daß die Punkte $p_0, \dots, p_n$ linear unabhängig sind. Dann sei C^0 das n -Simplex mit den p_i als Eckpunkten. Und C^τ gehe aus C^0 durch starre Verschiebung hervor.

Literatur

[1] FREUDENTHAL, H.: Über die Klassen der Sphärenabbildungen. I: Große Dimensionen. Compos. Math. **5**, 299–314 (1937). — [2] HILTON, P. J.: An introduction to homotopy theory. Cambridge Tracts Math. Phys. **43** (1953). — [3] PONTRJAGIN, L.: A classification of continuous transformations of a complex into a sphere II. C. R. Acad. Sci. URSS. **19**, 361–363 (1938). — [4] PONTRJAGIN, L.: Homotopieklassifizierung der Abbildungen der $(n+2)$ -dimensionalen in die n -dimensionale Sphäre. C. R. Acad. Sci. URSS. **70**, 957–959 (1950). — [5] WHITEHEAD, G.: The $(n+2)$ -nd homotopy group of the n -sphere. Ann. of Math. **52**, 245–247 (1950). — [6] WHITNEY, H.: On the maps of an n -sphere into another n -sphere. Duke Math. J. **3**, 46–50 (1937). — [7] WHITNEY, H.: The maps of a 4-complex into a 2-sphere. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 338–339 (1936). — [8] WHITNEY, H.: Maps of an n -complex into an n -sphere. Duke Math. J. **3**, 51–55 (1937).

Fulda, Marienstr. 9

(Eingegangen am 29. Dezember 1957)

Über die Äquivalenz von diskreten und kontinuierlichen Cesàro-Verfahren bei Funktionen vom Exponentialtyp

Von

WOLF-DIETER LANG

§ 1. Einleitung

Eine beliebige Folge komplexer Zahlen s_n ($n = 0, 1, \dots$) heißt C_k -limitierbar zum Wert s , wenn

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(k+1) n^{-k} \sum_{\nu=0}^n \binom{n-\nu+k-1}{k-1} s_\nu = s \quad (k > 0)^1)$$

ist. Wir schreiben dafür $C_k\text{-}\lim s_n = s$. Analog dazu heißt eine komplexwertige Funktion $f(x)$, die für $x \geq 0$ definiert ist und gewisse Integrierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt, $\mathfrak{C}_k$ -limitierbar zum Wert s , wenn

$$(1.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} k x^{-k} \int_0^x (x-u)^{k-1} f(u) du = s \quad (k > 0)^1)$$

ist. Dafür wird dann $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ geschrieben.

Wir wählen nun für die Zahlenwerte s_n in (1.1) die Werte $f(n)$ der Funktion $f(x)$ aus (1.2) an den Stellen $x = 0, 1, \dots, n, \dots$ und stellen die Frage: Unter welchen Umständen folgt aus $C_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ die Beziehung $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ und umgekehrt?

Es ist klar, daß man eine positive Antwort auf diese Frage nur für eine verhältnismäßig enge Klasse von Funktionen $f(x)$ erwarten kann. Wir behandeln diese Frage für die Funktionenklasse $\mathfrak{F}_\alpha$. Darunter verstehen wir die Klasse der Funktionen $f(z)$ ($z = x + iy = re^{i\varphi}$), die der folgenden Bedingung ($\mathfrak{F}_\alpha$) genügen:

Die Funktion $f(z)$ ist im abgeschlossenen Winkelraum $\overline{W}_\alpha$ ($|\varphi| \leq \alpha$;
($\mathfrak{F}_\alpha$) $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) holomorph und vom Exponentialtyp, d. h. es gilt $|f(z)| \leq M e^{\alpha|z|}$
($z \in \overline{W}_\alpha$) für zwei nicht negative Konstanten M und α .

Das Wachstum einer solchen Funktion $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ längs eines Strahls $\arg z = \varphi$ beschreibt die Indikatorfunktion

$$(1.3) \quad h_f(\varphi) = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \log |f(re^{i\varphi})| \quad (|\varphi| \leq \alpha).$$

¹⁾ Wir betrachten nur die Cesàro-Verfahren positiver Ordnung.

Unsere oben gestellte Frage schließt an das damit eng verwandte und durch den Satz von CARTWRIGHT gelöste Problem an, unter welchen Umständen von $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ auf $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ geschlossen werden kann.

Satz A (CARTWRIGHT). Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ und ist $h_f(\pm\alpha) < \pi \sin \alpha$, so folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ stets $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ ²⁾.

Das eine *Hauptergebnis* der vorliegenden Arbeit ist der folgende

Satz 9. Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ und $k > 0$ fest vorgegeben. Dann gilt:

a) Aus C_k - $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ folgt C_k - $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$, wenn $h_f(\pm\alpha) < \pi \sin \alpha$ ist.

b) Aus C_k - $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ folgt C_k - $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$, wenn $h_f(\pm\alpha) < 2\pi \sin \alpha$ ist.

Diese Aussagen werden falsch für $h_f(\pm\alpha) \leq \pi \sin \alpha$ bzw. $\leq 2\pi \sin \alpha$.

Beim Beweis dieses Satzes spielen neben dem Satz von CARTWRIGHT zwei Erweiterungen des folgenden funktionentheoretischen Satzes eine Rolle.

Satz B (PLANCHEREL-PÓLYA). Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, so folgt aus $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ stets $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ ³⁾.

Die erste Erweiterung hiervon ist der folgende

Satz 1. Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ und ist $h_f(\pm\alpha) < \frac{2\pi}{b} \sin \alpha$, so folgt aus $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+b) - f(x)] = 0$ stets $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ ($0 < b < \infty$). Diese Aussage wird falsch für $h_f(\pm\alpha) \leq \frac{2\pi}{b} \sin \alpha$.

Daß dieses Ergebnis den Satz B enthält, sieht man sofort ein. Denn ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, so ist $h_f(\pm\alpha) < \infty$, und nach Wahl eines genügend kleinen b wird sicher $h_f(\pm\alpha) < \frac{2\pi}{b} \sin \alpha$.

Eine zweite Erweiterung von Satz B erhält man dadurch, daß man in bekannter Weise einen Differentialoperator D^m nicht nur für ganzes $m > 0$, sondern für beliebiges $m > 0$ einführt (s. Def. 2).

Satz 2. Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, so folgt aus $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ stets $\lim_{x \rightarrow \infty} D^m f(x) = 0$ ($m > 0$).

Nachdem in den Sätzen 3 und 4 asymptotische Erweiterungen der Sätze 1 und 2 gegeben werden, beweisen wir in Satz 5 eine limitierungstheoretisch interessante Aussage über die Größe der Cesàro-Mittel kleiner als k -ter Ordnung einer C_k -limitierbaren Funktion $f(x)$ ($f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$), wie sie für die Cesàro-Mittel einer C_k -limitierbaren Folge s_n bekannt ist.

Während durch Satz 9 die C_k -Limitierbarkeit der Folge $f(n)$ ($n = 0, 1, \dots$) und die C_k -Limitierbarkeit der Funktion $f(x)$ ($x \geq 0$) in Zusammenhang gebracht werden, behandeln wir in §6 die analoge Frage für $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ und $\int_0^{\infty} f(x) dx$. Das Ergebnis ist der folgende

²⁾ Diese Form des Satzes findet sich implizit bei CARTWRIGHT [3], explizit bei MACINTYRE [10, S. 16]; vgl. auch BOAS [2, S. 180].

³⁾ Dieses Ergebnis findet sich zuerst bei PLANCHEREL-PÓLYA [11a, S. 243]. Unabhängig davon wurde es neuerdings von GAIER bewiesen [5, S. 454]. Vgl. dazu auch BOAS [2a].

Satz 10. Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ und $k \geq 0$ fest vorgegeben. Dann gilt:

a) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ C_k -summierbar, so ist $\int_0^{\infty} f(x) dx$ $\mathfrak{C}_k$ -summierbar, sofern $h_f(\pm\alpha) < \pi \sin \alpha$ ist.

b) Ist $\int_0^{\infty} f(x) dx$ $\mathfrak{C}_k$ -summierbar, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ C_k -summierbar, sofern $h_f(\pm\alpha) < 2\pi \sin \alpha$ ist.

Diese Aussagen werden falsch für $h_f(\pm\alpha) \leq \pi \sin \alpha$ bzw. $\leq 2\pi \sin \alpha$.

Zum Schluß bringen wir noch eine Anwendung von Satz 9 auf Cesàro-Borel-Verfahren (s. DOETSCH [4] und GAIER [6, S. 878])⁴⁾. Unser Ergebnis ist

Satz 11. Es sei $s_n = O(K^n)$ ($n \rightarrow \infty$, K fest) und $k > 0$ fest vorgegeben. Dann gilt:

a) Aus $C_k B_I \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ folgt $\mathfrak{C}_k B \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, wenn $K < (\pi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ ist.

b) Aus $\mathfrak{C}_k B \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ folgt $C_k B_I \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, wenn $K < (4\pi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ ist.

Diese Aussagen werden falsch für

$$s_n = O(n^{(k)} (\pi^2 + 1)^{n/2})^5 \quad \text{bzw.} \quad s_n = O(n(4\pi^2 + 1)^{n/2}).$$

Insbesondere können also in a) und b) die Zahlen $(\pi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ und $(4\pi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ durch keine größeren ersetzt werden. Ob die Aussagen a) und b) schon für $s_n = O((\pi^2 + 1)^{n/2})$ bzw. $s_n = O((4\pi^2 + 1)^{n/2})$ falsch werden, konnte nicht geklärt werden.

Mit Satz 11 ist die von GAIER in [6, S. 879] gestellte Frage beantwortet.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche Hinweise bei der Durchführung ist der Verfasser Herrn Dr. D. GAIER zu großem Dank verpflichtet.

§ 2. Definitionen und Hilfssätze

In diesem Paragraphen werden für einige im folgenden immer wieder auftretende Begriffe abkürzende Bezeichnungen eingeführt und ein paar kleinere Hilfssätze bewiesen.

Mit W_α bezeichnen wir den offenen Winkelraum $|\varphi| < \alpha$ ($0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), mit $\overline{W}_\alpha$ seine abgeschlossene Hülle.

Definition 1. Die Funktion $f(z)$ sei in $\overline{W}_\alpha$ stetig. Dann definieren wir für alle $z \in \overline{W}_\alpha$ folgende Funktionen $\mathfrak{S}_k(z; f)$ und $\mathfrak{I}_k(z; f)$:

$$(2.1) \quad \mathfrak{S}_k(z; f) = \begin{cases} f(z) & (k=0) \\ \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^z (z-w)^{k-1} f(w) dw & (k>0)^6; \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \mathfrak{I}_k(z; f) = \Gamma(k+1) [\mathfrak{S}_{k+1}(z+1; f) - \mathfrak{S}_{k+1}(z; f)] \quad (k \geq 0).$$

⁴⁾ Die Verfahren $C_k B_I$ und $\mathfrak{C}_k B$ werden in Definition 4 erklärt.

⁵⁾ Dabei bezeichne $\{k\}$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich k .

⁶⁾ Hier und auch im folgenden werde stets geradlinig von 0 nach z integriert. Dabei wird $(z-w)^{k-1}$ so gewählt, daß es für positives z auf dieser Strecke positiv wird.

Hilfssatz 1. Ist die Funktion $f(z)$ in W_α holomorph und vom Exponentialtyp, und in $\overline{W}_\alpha$ stetig, so gilt das gleiche auch für die Funktionen $\mathfrak{S}_k(z; f)$ für $k > 0$. Ferner besteht die Beziehung

$$(2.3) \quad h_{\mathfrak{S}_k(f)}(\varphi) \leq h_f(\varphi) \quad (|\varphi| \leq \alpha).$$

Beweis. Es ist $\mathfrak{S}_k(z; f) = \frac{1}{\Gamma(k)} z^k g(z)$ für $k > 0$, wobei $g(z) = \int_0^1 (1-u)^{k-1} f(zu) du$ ist.

(a) Die Funktionen $g_n(z) = \int_0^1 (1-u)^{k-1} f(zu + \frac{1}{n}) du$ sind in W_α holomorph.

Ferner strebt $g_n(z) \rightarrow g(z)$ ($n \rightarrow \infty$), gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von W_α . Also ist $g(z)$ in W_α holomorph und damit auch $\mathfrak{S}_k(z; f)$.

(b) Die Funktion $g(z)$ ist in $\overline{W}_\alpha$ stetig, also auch $\mathfrak{S}_k(z; f)$.

(c) Für ein festes q ($|q| \leq \alpha$) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $M(\varepsilon)$, so daß gilt

$$|f(re^{iq})| \leq M(\varepsilon) e^{(h_f(q) + \varepsilon)r}$$

[s. (1.3)]. Also wird

$$|\mathfrak{S}_k(z; f)| \leq \frac{1}{\Gamma(k)} r^k M(\varepsilon) e^{(h_f(q) + \varepsilon)r} \int_0^1 (1-u)^{k-1} du \leq r^k M_1(\varepsilon) e^{(h_f(q) + \varepsilon)r}.$$

Somit gilt $h_{\mathfrak{S}_k(f)}(\varphi) \leq h_f(\varphi) + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und daraus folgt (2.3).

Als nächstes führen wir in üblicher Weise (s. z.B. HARDY [7]) einen allgemeinen Differentialoperator D^m ein.

Definition 2. Die Funktion $f(z)$ sei in W_α holomorph und in $\overline{W}_\alpha$ stetig. Wir setzen dann für jedes $m \geq 0$ und $z \in W_\alpha$

$$(2.4) \quad D^m f(z) = \frac{1}{\Gamma(m+1-m)} \frac{d^{[m]+1}}{dz^{[m]+1}} \left\{ \int_0^z (z-w)^{[m]-m} f(w) dw \right\}.$$

Man sieht sofort, daß für ganzes $m \geq 0$ $D^m f(z) = \frac{d^m}{dz^m} f(z)$ gilt. Berücksichtigt man (2.1), so läßt sich schreiben

$$(2.5) \quad D^m f(z) = D^{[m]+1} \mathfrak{S}_{[m]+1-m}(z; f).$$

Hilfssatz 2. Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, so ist $f'(z) \in \mathfrak{F}_\beta$ ($0 < \beta < \alpha$).

Beweis. Offensichtlich läßt sich zu jedem β ($0 < \beta < \alpha$) einheitlich für alle $z \in \overline{W}_\beta$ ein $d > 0$ wählen, so daß gilt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw,$$

wenn K der Kreis um z mit Radius d ist. Also ist

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{d} M e^{a(|z|+d)} = M_1 e^{a|z|} \quad (z \in \overline{W}_\beta).$$

Hilfssatz 3. Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, so ist $D^m \mathfrak{S}_k(z+1; f) \in \mathfrak{F}_\beta$, wobei $0 < \beta < \alpha$. Ferner gilt die Beziehung

$$(2.6) \quad D^m \mathfrak{S}_k(z+1; f) = \mathfrak{S}_{k-m}(z+1; f) \quad (0 \leq m \leq k; z \in \overline{W}_\beta),$$

insbesondere also

$$(2.7) \quad D^k \mathfrak{S}_k(z+1; f) = f(z+1).$$

Beweis. Die Funktion $\mathfrak{S}_k(z; f)$ ist nach Hilfssatz 1 in W_α holomorph und vom Exponentialtyp und in $\overline{W}_\alpha$ stetig. Also gilt wieder nach Hilfssatz 1 von $\mathfrak{S}_{[m]+1-m}(z; \mathfrak{S}_k(f))$ dasselbe. Aus Hilfssatz 2 und (2.5) folgt dann sofort $D^m \mathfrak{S}_k(z+1; f) \in \mathfrak{F}_\beta$.

Sehr leicht zeigt man nun für positives z die Beziehung (2.6). Es gilt nämlich (s. z. B. HARDY [8; S. 111])

$$(2.8) \quad \mathfrak{S}_{[m]+1-m}(x; \mathfrak{S}_k(f)) = \mathfrak{S}_{k+[m]+1-m}(x; f)$$

und, wie man sofort verifiziert,

$$(2.9) \quad \frac{d}{dx} \mathfrak{S}_r(x; f) = \mathfrak{S}_{r-1}(x; f) \quad \text{für } r \geq 1.$$

Aus (2.5), (2.8) und (2.9) folgt dann (2.6) für positives z , also (durch analytische Fortsetzung) für alle $z \in \overline{W}_\beta$.

Hilfssatz 4. Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$. Ferner sei γ mit $0 < |\gamma| \leq \alpha \leq \pi/2$ fest gegeben und $h_f(\gamma) < c$. Dann folgt aus $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ stets

$$(2.10) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-c} e^{\rho} f(x + \rho e^{i\gamma}) = 0$$

gleichmäßig für alle $\rho > 0$.

Beweis. Wir führen die Hilfsfunktion $g(z) = e^{\frac{i}{\sin \gamma} z} f(z)$ ein. Auf dem Strahl $\arg z = \gamma$ gilt $g(z) \rightarrow 0$ ($|z| \rightarrow \infty$) und auf dem Strahl $\arg z = 0$ gilt $g(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$). Nach dem Prinzip von PHRAGMÉN und LINDELÖF (s. z. B. TITCHMARSH [12, S. 177]) folgt daraus die Beschränktheit von $g(z)$ in dem durch diese beiden Strahlen eingeschlossenen Winkelraum und stärker noch (s. z. B. TITCHMARSH [12, S. 179]), daß $g(z) \rightarrow 0$ strebt für $|z| \rightarrow \infty$, gleichmäßig in diesem Winkelraum. Setzt man nun $z = x + \rho e^{i\gamma}$, so ergibt sich (2.10).

Endlich sei noch ohne Beweis (s. BOAS [2, S. 66–68]) erwähnt

Hilfssatz 5. Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$; ferner sei $h_f(0) \leq 0$ und $h_f(\pm \alpha) < c$. Dann gilt

$$(2.11) \quad \begin{cases} h_f(\varphi) \leq h_f(\alpha) \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} & (0 \leq \varphi \leq \alpha) \\ h_f(\varphi) \leq h_f(-\alpha) \frac{|\sin \varphi|}{\sin \alpha} & (0 \geq \varphi \geq -\alpha) \end{cases}$$

und

$$(2.12) \quad |f(z)| \leq M e^{c|z|} \quad (z \in \overline{W}_\alpha).$$

§ 3. Erweiterungen eines Satzes der Funktionentheorie

Wir sind nun in der Lage, die Erweiterungen von Satz B zu beweisen.

Satz 3. Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$. Dann folgt aus $f(x+b) - f(x) = s x^k + o(x^k)$ für $x \rightarrow \infty$ (s komplex, k reell, $0 < b < \infty$) stets $f'(x) = \frac{s}{b} x^k + o(x^k)$ für $x \rightarrow \infty$, sofern $h_f(\pm \alpha) < \frac{2\pi}{b} \sin \alpha$ ist. Diese Aussage wird falsch für $h_f(\pm \alpha) \leq \frac{2\pi}{b} \sin \alpha$.

Dieser Satz schließt also von einem gewissen Verhalten des Differenzenquotienten $\frac{f(x+b)-f(x)}{b}$ ($x \rightarrow \infty$) auf dasselbe Verhalten des Differentialquotienten $f'(x)$ ($x \rightarrow \infty$).

Beweis⁷⁾. Man sieht leicht ein, daß es genügt, den Spezialfall — aus $f(x+1)-f(x)=o(x^k)$ folgt $f'(x)=o(x^k)$ — zu beweisen. Denn ist $b \neq 1$, so setze man $f(z) \rightarrow f^*(z)$, und ist $f(x+1)-f(x) \cong s x^k$, so betrachte man die Funktion $f^*(z) = f(z) - \frac{s}{k+1} (z+1)^{k+1}$ für $k \neq -1$ bzw. $f^*(z) = f(z) - s \log(z+1)$ für $k = -1$.

Es sei nun $g(z) = f(z+1) - f(z)$ und $G(z) = \int_0^z g(w) dw$ für alle z im Holomorphiegebiet von $f(z)$. Dann wählen wir positive Konstanten c und β , so daß gilt

$$(3.1) \quad h_f(\pm \alpha) < c < 2\pi \sin \beta < 2\pi \sin \alpha$$

und führen die Funktion

$$(3.2) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi^2}{(\sin \pi w)^2} G(z+w) dw \quad (z \in W_\beta)$$

ein. Dabei sei C der oben gezeichnete Weg, dessen Scheitel so nahe beim Ursprung liege, daß für alle $z \in W_\beta$ und $w \in C$ der Punkt $z+w$ im Holomorphiegebiet von $f(z)$ liegt.

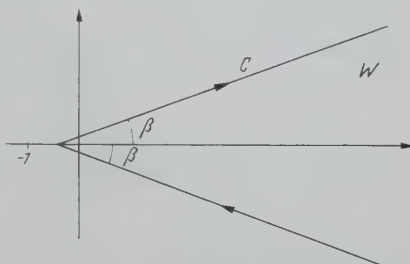


Fig. 1

Wir beweisen nun die Holomorphie von $F(z)$ in W_β und die Gültigkeit von

$$(3.3) \quad f'(z) = F'(z) \quad (z \in W_\beta).$$

(a) Zunächst sieht man leicht ein, daß $f(x) = O(x^{k+1})$ ($x \rightarrow \infty$) ist. Also ist sicherlich $h_f(0) \leq 0$. Daraus folgt nach Hilfssatz 5 wegen (3.1)

$$|f(z)| \leq M e^{c|z|} \quad (z \in \overline{W}_\alpha).$$

Dann gilt aber auch

$$(3.4) \quad |G(z+w)| \leq M_1 e^{c|z+w|} \leq M_1 e^{c(|z|+|w|)} \quad (z+w \in \overline{W}_\alpha).$$

Da nun längs C für $|w| \rightarrow \infty$

$$(3.5) \quad |\sin \pi w|^2 \sim e^{2\pi \sin \beta |w|}$$

gilt, ist das Integral (3.2) wegen (3.1), (3.4) und (3.5) in jedem beschränkten Teilbereich von W_β gleichmäßig konvergent. Das heißt, $F(z)$ ist in W_β holomorph. Wegen (3.4) gilt ferner noch die Abschätzung

$$(3.6) \quad |F(z)| \leq M_2 e^{c|z|} \quad (z \in W_\beta).$$

⁷⁾ Vergleiche hierzu NÖRLUND [11, S. 68 ff.].

(b) Es gilt die Beziehung

$$(3.7) \quad F(z+1) - F(z) = g(z) = f(z+1) - f(z) \quad (z \in W_\beta).$$

$$\begin{aligned} F(z+1) - F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi^2}{(\sin \pi w)^2} [G(z+1+w) - G(z+w)] dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-C+C_1} \frac{\pi^2}{(\sin \pi w)^2} G(z+w) dw, \end{aligned}$$

wenn C_1 der um eine Einheit nach rechts verschobene Weg C bedeutet. Nach dem Residuensatz folgt

$$F(z+1) - F(z) = G'(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2+C_3} \frac{\pi^2}{(\sin \pi w)^2} G(z+w) dw.$$

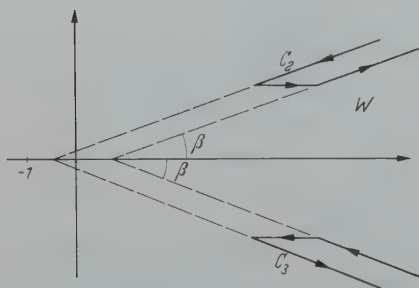


Fig. 2

Läßt man nun die waagrechten Teilstücke der Wege C_2 und C_3 ins Unendliche rücken, so sieht man leicht, daß

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2+C_3} \dots \text{für jedes feste } z \in W_\beta \text{ gegen Null strebt. Also besteht die Beziehung (3.7).}$$

(c) Wir beweisen nun

$$(3.8) \quad F(z) = f(z) + \text{const} \quad (z \in W_\beta).$$

Wegen (3.7) gilt $F(z) = f(z) + p(z)$, wobei $p(z)$ holomorph in W_β ist und der Beziehung $p(z+1) = p(z)$ genügt. Ferner gilt wegen (3.1) und (3.6)

$$(3.9) \quad |p(z)| \leq M_3 e^{c|z|} \quad (z \in W_\beta).$$

Die Funktion $p(z)$ muß also eine ganze Funktion mit der Periode 1 und vom Exponentialtyp sein, die dann (s. BOAS [2, S. 109]) für eine natürliche Zahl n die folgende Darstellung erlaubt:

$$p(z) = \sum_{v=1}^n a_v e^{2\pi i v z}.$$

Da aber hierbei $h_{p(z)}(+\beta) = 2\pi n \cdot \sin \beta$ ist, muß wegen (3.1) und (3.9) $n=0$ sein, d.h. $p(z) = \text{const}$. Damit ist (3.3) bewiesen.

(d) Wir kommen nun zum Beweis der eigentlichen Aussage von Satz 3.

Es gilt $g(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$) und wegen (2.12) und (3.1) $h_g(\pm\beta) < c$. Nach Hilfssatz 4 folgt daraus

$$(3.10) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-c\varrho} |g(x + \varrho e^{\pm i\beta})| |x + \varrho e^{\pm i\beta}|^{-k} = 0,$$

gleichmäßig für alle $\varrho > 0$. Da jedoch bei positivem k für alle $\varrho > 0$ und $x \geq 1$

$$(3.11) \quad |x + \varrho e^{\pm i\beta}|^{-k} = x^{-k} \left| 1 + \frac{\varrho}{x} e^{\pm i\beta} \right|^{-k} \geq x^{-k} (1 + \varrho)^{-k}$$

ist, gibt es hiernach mit (3.10) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0(\varepsilon)$, so daß gilt

$$(3.12) \quad |g(x - \varrho e^{-i\beta})| < \varepsilon (1 - \varrho)^k e^{c\varrho} x^k \quad (x \geq x_0 \geq 1; \varrho > 0).$$

Hieraus ersieht man sofort mit Hilfe von (3.1) und (3.5), daß

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi^2}{(\sin \pi w)^2} g(x+w) dw = o(x^k) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Den Fall nicht positiver k erledigt man sogar noch einfacher.

(e) Ein Beispiel für die letzte Behauptung in Satz 3 ist die Funktion $f(z) = \sin 2\pi z$. Damit ist der Beweis vollständig.

Die in § 1 erwähnte zweite Erweiterung von Satz B ist eine einfache Folge reeller Zusammenhänge und im Hinblick auf die in Satz 5 erfolgende Anwendung auf funktionale Cesàro-Verfahren interessant.

Satz 4. Ist $f(z)$ in W_λ holomorph und vom Exponentialtyp, und in $\overline{W}_\alpha$ stetig, so folgt aus $f(x) = s x^k + o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$; $k > -1$, s komplex) stets $D^m f(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$; $m > 0$).

Beweis. (a) ganzes $m > 0$: Es ist $g(z) = (z+1)^{-k} f(z+1) \in \mathfrak{F}_\alpha$. Nach Satz B folgt $g'(x) = o(1)$ ($x \rightarrow \infty$). Mit Hilfssatz 2 ergibt sich die Behauptung für $m > 1$.

(b) beliebiges nicht ganzes $m > 0$: Es gilt (2.5). Also genügt es wegen (a) nachzuweisen, daß

$$(3.13) \quad g(z) = D \mathfrak{S}_{[m]+1-m}(z+1; f) \in \mathfrak{F}_\beta \quad (0 < \beta < \alpha)$$

und

$$(3.14) \quad g(x) = o(x^k) \quad (x \rightarrow \infty)$$

gilt. Die Aussage (3.13) folgt sofort aus den Hilfssätzen 1 und 2. Zum Beweis von (3.14) setzen wir $[m] - m = -j$ ($0 < j < 1$) und $f(z) = s(z+1)^k + f^*(z)$ wobei $f^*(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$). Es ist

$$g(x-1) = \frac{1}{\Gamma(1-j)} D \left\{ \int_0^{x-1} (x-u)^{-j} f(u) du + \int_{x-1}^x (x-u)^{-j} f(u) du \right\}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \left| D \int_{x-1}^x (x-u)^{-j} f(u) du \right| &= \left| \int_{x-1}^x (x-u)^{-j} f'(u) du \right| \\ &\leq \max_{x-1 \leq u \leq x} |f'(u)| \cdot \int_{x-1}^x (x-u)^{-j} du = o(x^k) \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$D \int_0^{x-1} (x-u)^{-j} f(u) du = -j \int_0^{x-1} (x-u)^{-1-j} f(u) du + f(x-1).$$

Da $f(x-1) = s x^k + o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$) ist, ist der Beweis von (3.14) erbracht, wenn wir noch zeigen können, daß gilt

$$(3.15) \quad -j \int_0^{x-1} (x-u)^{-1-j} f(u) du = -s x^k + o(x^k) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Dazu spalten wir das Integral in (3.15) auf in 3 Teilintegrale. Es gilt für $0 < q < 1$

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| -j \int_0^{x-x^q} (x-u)^{-1-j} f(u) du \right| &\leq M \int_0^{x-x^q} (x-u)^{-1-j} (u+1)^k du \\ &\leq \frac{M}{k+1} x^{-q(1+j)} [(x-x^q+1)^{k+1} - 1] \\ &\leq M_1 x^{1-q(1+j)} x^k [(1-x^{q-1}+x^{-1})^{k+1} - x^{-k-1}] \\ &= o(x^k) \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned} \right.$$

wenn wir q noch so wählen, daß $q > \frac{1}{1-j}$ ist. Ferner gilt für ein $\xi_x \in (x-x^q, x-1)$

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| -j \int_{x-x^q}^{x-1} (x-u)^{-1-j} f^*(u) du \right| &\leq j |f^*(\xi_x)| \int_{x-x^q}^{x-1} (x-u)^{-1-j} du \\ &\leq |f^*(\xi_x)| (1-x^{-qj}) \\ &= o(x^k) \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned} \right.$$

Entsprechend (3.17) überlegt man sich die folgende Beziehung

$$(3.18) \quad -j \int_{x-x^q}^{x-1} (x-u)^{-1-j} s(u+1)^k du = -s x^k + o(x^k) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Aus (3.16) bis (3.18) ergibt sich aber (3.15) und damit (3.14).

§ 4. Limitierungstheoretische Sätze

Ist eine Funktion $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ $\mathfrak{C}_k$ -limitierbar zum Wert s , so können wir nach (1.2) und (2.1) auch schreiben

$$(4.1) \quad \mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(k+1) x^{-k} \mathfrak{S}_k(x; f) = s.$$

Satz 5. Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, $k > 0$ und $l > -1$ fest vorgegeben, so folgt aus $\mathfrak{S}_k(x; f) = s x^l + o(x^l)$ stets $\mathfrak{S}_{k'}(x; f) = o(x^l)$ ($x \rightarrow \infty$; $0 \leq k' < k$). Insbesondere folgt aus $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ ($k > 0$) stets $\mathfrak{S}_{k'}(x; f) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$; $0 < k' < k$) und $f(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$).

Beweis. Die Funktion $\mathfrak{S}_k(z; f)$ ist nach Hilfssatz 1 in W_α holomorph und vom Exponentialtyp, und in $\overline{W}_\alpha$ stetig. Also folgt aus $\mathfrak{S}_k(x; f) = s x^l + o(x^l)$ ($x \rightarrow \infty$) nach Satz 4 und (2.6)

$$D^{k-k'} \mathfrak{S}_k(x; f) = \mathfrak{S}_{k'}(x; f) = o(x^l) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Als nächstes führen wir im Zusammenhang mit den bekannten Rieszschen Limitierungsverfahren für Folgen neue Limitierungsverfahren für Funktionen — die $\mathfrak{R}_k$ -Verfahren — ein.

Definition 3a. Ist s_n ($n=0, 1, \dots$) eine Folge komplexer Zahlen, so sei

$$T_k(x; s_v) = \sum_{v=0}^{[x]+1} (x+1-v)^k s_v - \sum_{v=0}^{[x]} (x-v)^k s_v \quad (k > 0)$$

gesetzt. Die Folge s_n heißt R_k -limitierbar zum Wert s ($R_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$), wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-k} T_k(x; s_p) = s$ ist⁸⁾.

3b. Die komplexwertige Funktion $f(x)$ ($x \geq 0$) heißt $\mathfrak{R}_k$ -limitierbar ($k > 0$) zum Wert s ($\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$), wenn mit der Bezeichnung (2.2) gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-k} \mathfrak{T}_k(x; f) = s.$$

Wir stellen nun einen Zusammenhang her zwischen der $\mathfrak{R}_k$ -Limitierbarkeit einer Funktion $f(x)$ und der R_k -Limitierbarkeit der Folge $s_n = f(n)$ ($n = 0, 1, \dots$). Es gilt der folgende

Satz 6. Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, gilt $h_f(\pm\alpha) < 2\pi \sin \alpha$ und ist $f(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$; $k > 0$, fest), so folgt aus $R_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ stets $\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ und umgekehrt.

Dieser Satz ergibt sich sofort aus dem folgenden Satz 6a, den wir jetzt beweisen werden.

Satz 6a. Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$, gilt $h_f(\pm\alpha) < 2\pi \sin \alpha$ und ist $f(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$; $k \geq 0$, fest), so ist für $x \rightarrow \infty$

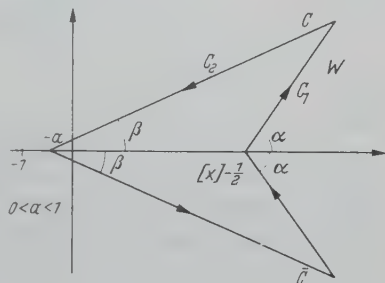


Fig. 3

$$\sum_{v=0}^{[x]} (x-v)^k f(v) - \int_0^x (x-u)^k f(u) du \sim x^k.$$

Beweis. Wegen $f(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$) genügt es die Differenz

$$(4.2) \quad G_k(x) = \sum_{v=0}^{[x]-1} (x-v)^k f(v) - \int_0^{[x]-\frac{1}{2}} (x-u)^k f(u) du$$

zu untersuchen, die man noch in bekannter Weise (s. z. B. BEHNKE-SOMMER [1, S. 216]) folgendermaßen umschreiben kann

$$G_k(x) = \int_C \frac{(x-w)^k}{1 - e^{-2\pi i w}} f(w) dw + \int_{\bar{C}} \frac{(x-w)^k}{e^{2\pi i w} - 1} f(w) dw.$$

Dabei sind C und $\bar{C}$ die beiden oben gezeichneten Wege, wenn c, c_1 und β positive Konstanten bezeichnen, so daß gilt

$$(4.3) \quad h_f(\pm\alpha) < c < c_1 < 2\pi \sin \beta < 2\pi \sin \alpha.$$

(a) Abschätzung des Integralbeitrags längs C_1 . Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ kann man ein $x_0(\varepsilon)$ angeben, so daß für alle $x \geq x_0 \geq 1$ und $\varrho > 0$ die Beziehung

$$(4.4) \quad |f([x] - \frac{1}{2} + \varrho e^{i\alpha})| < \varepsilon e^{\varrho} (1 + \varrho)^k x^k$$

besteht, wie schon von (3.10) bis (3.12) aus Hilfssatz 4 hergeleitet wurde. Ferner gilt

$$(4.5) \quad |x - [x] + \frac{1}{2} - \varrho e^{i\alpha}|^k \leq (\frac{3}{2} + \varrho)^k$$

⁸⁾ Das sind die bekannten Limitierungsverfahren der Rieszschen arithmetischen Mittel

und

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{aligned} |1 - e^{-2\pi i ([x] - \frac{1}{2} + e^{i\alpha})}| &= |1 + e^{-2\pi i \varrho e^{i\alpha}}| \\ &\geq |1 - e^{2\pi i \varrho \sin \alpha}| \geq e^{2\pi \varrho \sin \beta}, \end{aligned} \right.$$

sobald ϱ genügend groß ist. Aus (4.3) bis (4.6) erhält man sofort

$$\int_{C_1} \frac{(x-w)^k}{1 - e^{-2\pi i w}} f(w) dw = o(x^k) \quad (x \rightarrow \infty).$$

(b) Wir zeigen jetzt, daß gilt

$$(4.7) \quad \int_{C_2} \frac{(x-w)^k}{1 - e^{-2\pi i w}} f(w) dw \sim x^k \quad (x \rightarrow \infty).$$

Nach (2.12) und (4.3) gilt für $w = -a + \varrho e^{i\beta}$ ($\varrho > 0$)

$$(4.8) \quad |f(w)| \leq M e^{\varrho},$$

$$(4.9) \quad |1 - e^{-2\pi i w}| \geq |1 - e^{2\pi \varrho \sin \beta}| \geq e^{c_1 \varrho},$$

sofern ϱ genügend groß ist. Können wir nun noch zeigen, daß für eine Konstante M_1 die folgende Beziehung gilt

$$(4.10) \quad \left| \left(1 - \frac{w}{x}\right)^k - 1 \right| \leq M_1 \frac{\varrho}{x} \quad (w \in C_2, x \geq 1),$$

dann ergibt sich aus (4.3) und (4.8) bis (4.10) die Richtigkeit von (4.7). Für $k=0$ ist nichts zu zeigen. Für $k>0$ schätzen wir folgendermaßen ab

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{w}{x}\right)^k - 1 \right| &= k \left| \int_0^{\frac{|w|}{x}} (1-s)^{k-1} ds \right| \\ &\leq \begin{cases} k \left(1 + \frac{|w|}{x}\right)^{k-1} \frac{|w|}{x} & \text{für } k \geq 1 \\ k \text{ const } \frac{|w|}{x} & \text{für } 0 < k < 1 \end{cases} \\ &\leq M_2 \frac{|w|}{x} \quad (w \in C_2, x \geq 1), \end{aligned}$$

was man sich leicht geometrisch klarmacht. Damit ist (4.10) bewiesen.

(c) Ganz entsprechend schließt man für das Integral längs $\bar{C}$, so daß also

$$G_k(x) \sim x^k \quad (x \rightarrow \infty) \quad \text{gilt.}$$

Wir wenden uns nun der Frage zu, unter welchen Umständen die $\mathfrak{G}_k$ -Limitierbarkeit einer Funktion deren $\mathfrak{R}_k$ -Limitierbarkeit bedingt und umgekehrt. Der Schluß ist sehr einfach, wenn wir von der $\mathfrak{G}_k$ -Limitierbarkeit ausgehen. Für den Umkehrschluß wird dann Satz 3 herangezogen.

Satz 7. Ist die Funktion $f(x)$ für $x \geq 0$ stetig, so folgt aus $\mathfrak{G}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ ($k > 0$, fest) stets $\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$.

Beim Beweis berücksichtige man nur, daß gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_k(x; f) &= \Gamma(k+1) [\mathfrak{S}_{k+1}(x+1; f) - \mathfrak{S}_{k+1}(x; f)] \\ &= \Gamma(k+1) D \mathfrak{S}_{k+1}(x + \vartheta_x; f) \quad (0 < \vartheta_x < 1) \\ &= \Gamma(k+1) \mathfrak{S}_k(x + \vartheta_x; f). \end{aligned}$$

Satz 8. Ist $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ und gilt $h_f(\pm \alpha) < 2\pi \sin \alpha$, so folgt aus $\mathfrak{H}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ ($k > 0$, fest) stets $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist $g_k(z) = \mathfrak{S}_{k+1}(z+1; f) \in \mathfrak{F}_\alpha$. Ferner ist

$$(4.11) \quad h_{g_k}(\pm \alpha) < 2\pi \sin \alpha.$$

Denn nach (2.3) ist $h_{\mathfrak{S}_{k+1}}(\pm \alpha) \leq h_f(\pm \alpha)$. Ferner gilt $h_{\mathfrak{S}_{k+1}}(0) \leq 0$, woraus nach (2.12) dann (4.11) folgt. Somit erfüllt $g_k(z)$ die Voraussetzungen von Satz 3 und danach folgt mit (2.6)

$$\begin{aligned} D\Gamma(k+1)g_k(x) &= D\Gamma(k+1)\mathfrak{S}_{k+1}(x+1; f) \\ &= \Gamma(k+1)\mathfrak{S}_k(x+1; f) \\ &= s.x^k + o(x^k) \quad (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

§ 5. Zusammenhang von C_k - und $\mathfrak{C}_k$ -Limitierbarkeit

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, den folgenden Hauptsatz zu beweisen.

Satz 9. Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_\alpha$ und $k > 0$ fest vorgegeben. Dann gilt:

- a) Aus $C_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ folgt $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$, wenn $h_f(\pm \alpha) < \pi \sin \alpha$ ist.
 b) Aus $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ folgt $C_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$, wenn $h_f(\pm \alpha) < 2\pi \sin \alpha$ ist.

Diese Aussagen werden falsch für $h_f(\pm \alpha) \leq \pi \sin \alpha$ bzw. $\leq 2\pi \sin \alpha$.

Beweis. a) Aus $C_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ folgt (s. z.B. HOBSON [9, S. 90]) $R_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ und $f(n) = o(n^k)$ ($n \rightarrow \infty$) (s. HARDY [8, S. 101]). Satz A liefert $f(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$) und Satz 6 $\mathfrak{H}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$, woraus sich dann mit Satz 8 $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ ergibt.

b) Aus $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ folgt nach Satz 7 $\mathfrak{H}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ und nach Satz 5 $f(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$). Mit Satz 6 ergibt sich $R_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ und daraus $C_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ (s. z.B. HOBSON [9, S. 90]).

Die beiden Funktionen $f_1(z) = (z+1)^k \sin \pi z$ und $f_2(z) = (2\pi z + 1)^e \cos 2\pi z$ sind Beispiele für die letzte Behauptung.

1. Es ist für jedes $k > 0$ $C_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(n) = 0$, während $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x)$ wegen Satz 5 nicht existiert.

2. Es ist für $k > e$ $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = 0$, während $C_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(n)$ nicht existiert.

Den ersten Teil der Behauptung sieht man z.B. folgendermaßen ein. Nach HARDY [8, S. 139] ist für $k > e$ $C_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^e \cos n = 0$, woraus nach a) $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)^e \cos x = 0$ folgt. Nun verifiziert man aber sofort, daß aus $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$ für $a > 0$ folgt $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(ax) = s$. Damit ergibt sich schließlich $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = 0$.

Wir bemerken noch, daß die Beweisführung von Satz 9 gleichzeitig gezeigt hat

Zusatz. Der Satz 9 bleibt richtig, wenn man $C_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ durch $R_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ und $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ durch $\mathfrak{R}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ersetzt.

§ 6. Zusammenhang von C_k - und $\mathfrak{C}_k$ -Summierbarkeit

Eine beliebige Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ komplexer Zahlen heißt C_k -summierbar, wenn

$$(6.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(k+1) n^{-k} \sum_{v=0}^n \binom{n-v+k}{k} a_v \quad (k \geq 0)$$

existiert.

Das Integral $\int_0^{\infty} f(x) dx$ einer komplexwertigen Funktion $f(x)$ heißt $\mathfrak{C}_k$ -summierbar, wenn

$$(6.2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-k} \int_0^x (x-u)^k f(u) du \quad (k \geq 0)$$

existiert [vgl. (1.1) und (1.2)]⁹⁾.

Wir stellen nun wieder für Funktionen $f(z) \in \mathfrak{F}_x$ die Frage, unter welchen Umständen man aus der C_k -Summierbarkeit der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ auf die $\mathfrak{C}_k$ -Summierbarkeit des Integrals $\int_0^{\infty} f(x) dx$ schließen kann und umgekehrt. Es sei gleich bemerkt, daß wir uns in diesem Fall mit einer reinen Summierbarkeitsaussage begnügen und nichts über die Werte der C_k -Summe bzw. $\mathfrak{C}_k$ -Summe aussagen wollen.

Satz 10. Es sei $f(z) \in \mathfrak{F}_x$ und $k \geq 0$ fest vorgegeben. Dann gilt:

a) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ C_k -summierbar, so ist $\int_0^{\infty} f(x) dx$ $\mathfrak{C}_k$ -summierbar, sofern $h_f(\pm \alpha) < \pi \sin \alpha$ ist.

b) Ist $\int_0^{\infty} f(x) dx$ $\mathfrak{C}_k$ -summierbar, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ C_k -summierbar, sofern $h_f(\pm \alpha) < 2\pi \sin \alpha$ ist.

Diese Aussagen werden falsch für $h_f(\pm \alpha) \leq \pi \sin \alpha$ bzw. $\leq 2\pi \sin \alpha$.

Beweis. a) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ C_k -summierbar ($k \geq 0$), so gilt (s. z.B. HOBSON [9, S. 90]) $\sum_{v=0}^{[x]} (x-v)^k f(v) \sim x^k$ ($x \rightarrow \infty$) sowie $f(n) = o(n^k)$ ($n \rightarrow \infty$) (s. HARDY [8, S. 101, 102]) und also mit Satz A $f(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$). Nach Satz 6a ergibt sich hieraus $\int_0^x (x-u)^k f(u) du \sim x^k$, was zu beweisen war.

b) Ist $\int_0^{\infty} f(x) dx$ $\mathfrak{C}_k$ -summierbar, gilt also $\mathfrak{C}_{k+1}(x; f) \sim x^k$ ($x \rightarrow \infty$), dann liefert Satz 5 $f(x) = o(x^k)$ ($x \rightarrow \infty$). Nach Satz 6a folgt hieraus $\sum_{v=0}^{[x]} (x-v)^k f(v) \sim x^k$ ($x \rightarrow \infty$), was wieder äquivalent mit der C_k -Summierbarkeit von $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ ist.

⁹⁾ Der Vergleich der absoluten Konvergenz von $\int f(x) dx$ mit der absoluten Konvergenz von $\sum f(n)$ ist durch zwei bereits bekannte Sätze behandelt (vgl. BOAS [2, S. 101 und 197]).

Ähnlich wie bei Satz 9 kann man sich nun überlegen, daß die Funktionen $f_1(z) = (z+1)^k \sin \pi z$ und $f_2(z) = (2\pi z + 1)^{-1} \cos 2\pi z$ Beispiele für die letzte Behauptung sind.

§ 7. Anwendung auf Cesàro-Borel-Verfahren

Wählt man in § 5 für $f(z)$ speziell die Borel-Transformierte $B(z; s_n) = e^{-z} \sum_{v=0}^{\infty} s_v \frac{z^v}{v!}$ einer komplexen Zahlenfolge s_n ($n=0, 1, \dots$), so erhält man über Satz 9 eine Aussage für Cesàro-Borel-Verfahren.

Definition 4. Eine komplexe Zahlenfolge s_n ($n=0, 1, \dots$) heißt

a) $C_k B_I$ -limitierbar zum Wert s , wenn $C_k \lim_{n \rightarrow \infty} B(n; s_n) = s$ ist;

b) $\mathfrak{C}_k B$ -limitierbar zum Wert s , wenn $\mathfrak{C}_k \lim_{x \rightarrow \infty} B(x; s_n) = s$ ist.

Wir schreiben dann $C_k B_I \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ bzw. $\mathfrak{C}_k B \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

Satz 11. Es sei $s_n = O(K^n)$ ($n \rightarrow \infty$, K fest) und $k > 0$ fest vorgegeben. Dann gilt:

a) Aus $C_k B_I \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ folgt $\mathfrak{C}_k B \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, wenn $K < (\pi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ ist.

b) Aus $\mathfrak{C}_k B \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ folgt $C_k B_I \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, wenn $K < (4\pi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ ist.

Diese Aussagen werden falsch für $s_n = O(n^{(k)}(\pi^2 + 1)^{n/2})^{10}$ bzw. $s_n = O(n(4\pi^2 + 1)^{n/2})$.

Beweis. a) Es ist $|s_n| \leq MK^n$ für ein $K < (\pi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ und daher, wenn

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{z^n}{n!}$ ist, $g(z)$ eine ganze Funktion mit $|g(z)| \leq Me^{K|z|}$. Betrachtet

man nun die ganze Funktion vom Exponentialtyp $f(z) = e^{-z} g(z)$ auf den Strahlen $\arg z = \pm \alpha$ mit $\operatorname{tg} \alpha = \pi$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), so ergibt sich sofort (vgl.

GAIER [6, Th. 2]) $h_I(\pm \alpha) = h_k(\pm \alpha) - \cos \alpha < (\pi^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \cos \alpha = \pi \sin \alpha$; also folgt aus $C_k B_I \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = s$ nach Satz 9 sicher $\mathfrak{C}_k \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = s$, d. h. $\mathfrak{C}_k B \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

b) Dieser Teil läßt sich ganz analog beweisen, man setze nur statt π jeweils 2π .

Wir vollenden den Beweis von Satz 11 mit Hilfe der beiden folgenden Gegenbeispiele.

1. Die Folge s_n mit

$$s_n = \begin{cases} 0 & n \leq \{k\} \\ \frac{n!}{(n - \{k\})!} \frac{(1 + \pi i)^{n - \{k\}} - (1 - \pi i)^{n - \{k\}}}{2i} & n > \{k\} \end{cases}$$

besitzt die Borel-Transformierte $B(z; s_n) = z^{\{k\}} \sin \pi z$. Daraus ersieht man, daß $C_k B_I \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ ist, während jedoch [vgl. das Beispiel der Funktion $f_1(z)$ in § 5] $\mathfrak{C}_k B \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nicht existiert.

2. Der Fall $k > 1$ läßt sich sofort durch die Folge t_n erledigen, die auf die Borel-Transformierte $B(z; t_n) = z \cos 2\pi z$ führt. Um auch den Fall $0 < k \leq 1$

¹⁰⁾ Siehe Fußnote 5.

erledigen zu können, verwenden wir diejenige Folge s_n , deren Borel-Transformierte

$$B(z; s_\nu) = \frac{z 4^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\pi/2} \cos^{-\alpha} t \cos(4z + \alpha) t dt \quad (0 < \alpha < 1)$$

wird. Für diese Folge s_n gilt $s_n = O(n(4\pi^2 + 1)^{n/2})$ ($n \rightarrow \infty$). Denn es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{z^n}{n!} &= e^z \frac{z 4^{1-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\pi/2} \cos^{-\alpha} t (e^{i(4z+\alpha)t} + e^{-i(4z+\alpha)t}) dt \\ &= \frac{4^{1-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos^{-\alpha} t [e^{i\alpha t} (1+4ti)^n + e^{-i\alpha t} (1-4ti)^n] dt \right\} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Die Folge s_n ist $\mathfrak{C}_k$ -B-limitierbar, sofern $k > \alpha$ ist. Es gilt nämlich $B(x; s_r) = \frac{2^{1-\alpha} \pi x}{\Gamma(1-\alpha-2x)\Gamma(2x+1)} \quad (x \geq 0)$ (s. z. B. TITCHMARSH [12, S. 134 7]). Weiter gilt wegen $\Gamma(x) \sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(1-x)}$ und $\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)} = x^a + O(x^{a-1}) \quad (x \rightarrow \infty)$ (s. z. B. TITCHMARSH [12, S. 58]) $B(x; s_r) = x^2 \sin \pi(2x + \alpha) + O(x^{2-1}) \quad (x \rightarrow \infty)$. Somit ist $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{x \rightarrow \infty} B(x; s_r) = 0$ sofern $k > \alpha$ ist [vgl. dazu das Beispiel der Funktion $f_2(z)$ in § 5].

Andererseits existiert aber $\mathfrak{C}_k\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} B(n; s_r)$ nicht. Damit ist Satz 11 vollständig bewiesen.

Literatur

- [1] BEHNKE, H., u. F. SOMMER: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955. — [2] BOAS, R. P.: Entire functions. New York 1954. — [2a] BOAS, R. P.: Growth of derivatives of entire functions. Math. Z. **68**, 296–298 (1957). — [3] CARTWRIGHT, M. L.: On certain integral functions of order 1. Quart. J. Math. Oxford Ser. **7**, 46–55 (1936). — [4] DOETSCH, G.: Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen. Dissertation. Göttingen 1920. — [5] GAIER, D.: Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren. Math. Z. **58**, 453–455 (1953). — [6] GAIER, D.: On modified Borel methods. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 873–879 (1955). — [7] HARDY, G. H.: Riemann's form of Taylor's series. J. London Math. Soc. **20**, 48–57 (1945). — [8] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [9] HOBSON, E. W.: The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Bd. II. Cambridge 1926. — [10] MACINTYRE, A. J.: Laplace's transformation and integral functions. Proc. London Math. Soc. (2) **45**, 1–20 (1938/39). — [11] NÖRLUND, N. E.: Differenzenrechnung. Berlin 1924. — [11a] PLANCHEREL, M., u. G. POLYA: Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. Comment. Math. Helv. **9**, 224–248 (1937). — [12] TITCHMARSH, E. C.: The theory of functions. Oxford 1952.

Stuttgart, Technische Hochschule, Math. Institut A

(Eingegangen am 23. Dezember 1957)

Note on the Central Limit Theorem

By

S. K. ZAREMBA

The Central Limit Theorem for independent variables, as proved in its whole generality by FELLER [4], is presently shown to be a fairly simple consequence of a weak form of the Second Limit Theorem. Additional results, generalizing those of KAWATA [8] and concerning moments, are obtained incidentally. Furthermore, an easy generalization of the whole argument leads to a proposition containing, as special cases, all the versions of the Central Limit Theorem for m -dependent variables [2, 3, 6, 7, 10] which could be traced in the existing literature.

THEOREM 1. *Let $\{x_k\}$ be an infinite sequence of independent random variables with respective distribution functions $\{F_k(x)\}$. Assume that, for some non-negative integer p , for a suitably chosen sequence $\{a_n\}$ of positive numbers, and for every positive η :*

$$(i_p) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-p} \sum_{k=1}^n \int_{|x| > \eta a_n} |x|^p dF_k(x) = 0;$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-2} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{|x| \leq \eta a_n} x^2 dF_k(x) - \left[\int_{|x| \leq \eta a_n} x dF_k(x) \right]^2 \right\} = 1;$$

and define $\{b_{n,k}\}$ by

$$b_{n,k} = \int_{|x| \leq a_n} x dF_k(x).$$

Then the distribution of the random variable

$$X_n = a_n^{-1} \sum_{k=1}^n (x_k - b_{n,k})$$

tends to the normal distribution with zero mean and unit variance; moreover, if $p > 0$, the moments of X_n up to the order p tend to the corresponding moments of the aforesaid distribution.

PROOF. It is easily seen that if $p > 0$, (i_p) entails $(i_0), \dots, (i_{p-1})$, and that there exists a sequence $\{\varepsilon_k\}$ of positive numbers tending to 0 and satisfying the conditions $(i'_0), \dots, (i'_p), (ii')$, obtained from $(i_0), \dots, (i_p), (ii)$ by substituting ε_n for η . Assuming that these conditions are satisfied, make

$$y_{n,k} = x_k \{1 - \max[0, \operatorname{sgn}(|x_k| - \varepsilon_n a_n)]\}; \quad z_{n,k} = x_k - y_{n,k},$$

$$(n = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, n).$$

Then (i'_0) can be re-written as follows;

$$(1) \quad P[z_{n,1} \neq 0] + \dots + P[z_{n,n} \neq 0] \rightarrow 0.$$

Hence, if $Z_n = a_n^{-1}(z_{n,1} + \dots + z_{n,n})$, a fortiori

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0.$$

On the other hand, if $Y_n = a_n^{-1}(y_{n,1} + \dots + y_{n,n})$ and $B_n = a_n^{-1}(b_{n,1} + \dots + b_{n,n})$, the variable $Y_n - B_n$ clearly has finite moments of every order. In particular,

$$(3) \quad E(Y_n - B_n) \rightarrow 0,$$

since we can assume $\varepsilon_n \leq 1$, and then

$$(4) \quad \begin{cases} |E(Y_n - B_n)| \leq a_n^{-1} \sum_{k=1}^n |E(y_{n,k} - b_{n,k})| \\ = a_n^{-1} \sum_{k=1}^n \int_{\varepsilon_n a_n < |x| \leq a_n} x dF_k(x) \leq \sum_{k=1}^n \int_{|x| > \varepsilon_n a_n} dF_k(x) \rightarrow 0 \end{cases}$$

according to (i'). In general,

$$(5) \quad E[Y_n - E(Y_n)]^r = a_n^{-r} \sum_{k(1), \dots, k(r)=1}^n E \left\{ \prod_{i=1}^r [y_{n,k(i)} - E(y_{n,k(i)})] \right\}.$$

The last summand can be factorized into products of expectations according to the pattern of identification of $k(1), \dots, k(r)$. The sum of all the terms factorized in a given way can be represented as

$$\sum a_n^{-\alpha(1)} E[y_{n,k(1)} - E(y_{n,k(1)})]^{\alpha(1)} \dots a_n^{-\alpha(s)} E[y_{n,k(s)} - E(y_{n,k(s)})]^{\alpha(s)},$$

where $\alpha(1), \dots, \alpha(s) > 0$; $\alpha(1) + \dots + \alpha(s) = r$; and the summation is extended to all sets of pairwise distinct positive integers $k(1), \dots, k(s)$ not exceeding n . The absolute value of the sum will increase if each term is replaced by its absolute value, and the summation variables are allowed to take equal values. Then it becomes a product of factors like

$$(6) \quad a_n^{-\alpha} \sum_{k=1}^n |E[y_{n,k} - E(y_{n,k})]^\alpha|;$$

it will be seen that all these factors are bounded, and that all those for which $\alpha \neq 2$ vanish in the limit.

If $\alpha = 1$, the factor is indeed equal to 0. If $\alpha \geq 2$, since

$$(7) \quad |y_{n,k} - E(y_{n,k})| \leq 2\varepsilon_n a_n,$$

the value of (6) does not exceed

$$(8) \quad (2\varepsilon_n)^{\alpha-2} a_n^{-2} (\text{var } y_{n,1} + \dots + \text{var } y_{n,n}),$$

which, according to (ii'), tends to 1 when $\alpha = 2$, and to 0 when $\alpha > 2$. But, if r is odd, every term of (5) must contain factors with odd moments. Hence

$$(9) \quad E[Y_n - E(Y_n)]^r \rightarrow 0 \quad \text{whenever } r \text{ is odd.}$$

If r is even, we are left with sums of products of variances. Since there are $r! / [(r/2)! 2^{r/2}]$ ways of forming r variables into $r/2$ pairs, and each of these groupings contributes the same amount to the grand total, the expression to be considered is

$$(10) \quad r! [(r/2)! 2^{r/2}]^{-1} a_n^{-r} \sum \text{var } y_{n,k(1)} \dots \text{var } y_{n,k(r/2)},$$

where the sum is taken with respect to all the sets of pairwise distinct values of $k(1), \dots, k(r/2)$ from 1 to n . However, the upper bounds obtained for the various sums of products of higher moments, and found to be infinitesimal,

still apply if these moments, now assumed to be even, are replaced by the appropriate powers of the corresponding variances. Hence, in the limit, equal values of the summation variables can be allowed, transforming (10) into

$$(11) \quad r! [(r/2)! 2^{r/2}]^{-1} a_n^{-r} (\text{var } y_{n,1} + \dots + \text{var } y_{n,n})^{r/2}.$$

Thus, according to (ii'),

$$(12) \quad E[Y_n - E(Y_n)]^r \rightarrow r! / [(r/2)! 2^{r/2}] \quad \text{when } r \text{ is even.}$$

The limits given by (9) and (12) for the moments of $Y_n - E(Y_n)$ are those of a normal distribution with zero mean and unit variance. Hence, according to the Second Limit Theorem (cf. e.g. [5]), this distribution is the limit to which the distribution of $Y_n - E(Y_n)$ tends as $n \rightarrow \infty$. Finally, owing to a proposition given by CRAMÉR ([1], Section 20.6), and as a consequence of (2) and (3), this is also the limiting distribution of $X_n = Y_n - E(Y_n) + E(Y_n - B_n) + Z_n$. Thus the first part of the theorem is proved.

If $p > 0$, it follows easily from (i') that the moments of Z_n up to the order p tend to 0 as $n \rightarrow \infty$. Consequently, owing to the Hölder Inequality, the moments of X_n up to the order p tend to the same limits as the corresponding moments of $Y_n - B_n$. Hence also the second part of the theorem is proved.

DEFINITION. The sequence $\{x_k\}$ of random variables is called m -dependent if the two sets $\{x_{i(1)}, \dots, x_{i(p)}\}$ and $\{x_{k(1)}, \dots, x_{k(q)}\}$ are mutually independent whenever $i(r) + m < k(s)$ for $r = 1, \dots, p$ and $s = 1, \dots, q$.

THEOREM 2. The conclusions of Theorem 1 are still valid if, in its statement, "independent" is replaced by " m -dependent", if (ii) is re-written as

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-2} \sum_{i,k=1}^n \left\{ \int_{|x|, |y| \leq \eta a_n} x y dF_{i,k}(x, y) - \left[\int_{|x| \leq \eta a_n} x dF_i(x) \right] \left[\int_{|y| \leq \eta a_n} y dF_k(y) \right] \right\} = 1,$$

where $F_{i,k}(x, y)$ is the joint distribution function of x_i and x_k , and if it is additionally assumed that

$$(iii) \quad a_n^{-2} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{|x| \leq a_n} x^2 dF_k(x) - \left[\int_{|x| \leq a_n} x dF_k(x) \right]^2 \right\} \quad \text{is bounded.}$$

PROOF. As far as (5), the beginning of the proof of Theorem 1 applies literally. Now, however, for any fixed value of n , the variables $\{y_{n,k}\}$ and $\{z_{n,k}\}$ are m -dependent, and this slightly complicates the factorization of the expectations, but the operation can still be carried out whenever the set $\{y_{n,k(1)}, \dots, y_{n,k(r)}\}$ is decomposable into mutually independent sub-sets, and it will be assumed that this has been done as far as it was possible. As before, terms corresponding to the same factorization can be grouped together, and the absolute value of the corresponding partial sum is found to be smaller than a product of sums like

$$(13) \quad a_n^{-\alpha} \sum |E[y_{n,j(1)} - E(y_{n,j(1)})] \dots [y_{n,j(\alpha)} - E(y_{n,j(\alpha)})]|,$$

the sum being taken with respect to all the sets $\{j(1), \dots, j(\alpha)\}$ for which $1 \leq j(i) \leq n$ ($i = 1, \dots, \alpha$), and the corresponding set of random variables cannot be partitioned into mutually independent sets.

If $\alpha=1$, the value of (13) is exactly 0. Otherwise $\alpha \geq 2$, and, as a result of the m -dependence of the variables concerned, and of (7), the sum (13) is smaller than

$$\begin{aligned} & [2m(\alpha-1)+1]^{\alpha-2} a_n^{-2} (2\varepsilon_n)^{\alpha-2} \sum_{|j(1)-j(2)| \leq m} E \left[\prod_{i=1}^2 |y_{n,j(i)} - E(y_{n,j(i)})| \right] \leq \\ & \leq (2m+1) [2m(\alpha-1)+1]^{\alpha-2} (2\varepsilon_n)^{\alpha-2} a_n^{-2} (\text{var } y_{n,1} + \dots + \text{var } y_{n,n}). \end{aligned}$$

Here, $[2m(\alpha-1)+1]^{\alpha-2}$ is a crude upper bound for the number of sets of values of $j(3), \dots, j(\alpha)$ which, given $j(1)$ and $j(2)$, make it impossible to decompose $\{y_{n,j(1)}, \dots, y_{n,j(\alpha)}\}$ into mutually independent sets. This coefficient, as well as $2m+1$, is independent of n , while it follows easily from (iii) and (4) that $a_n^{-2}(\text{var } y_{n,1} + \dots + \text{var } y_{n,n})$ is bounded. Thus the factor is always bounded, and tends to 0 if $\alpha > 2$. The remainder of the proof runs exactly as before, the only difference being that now (10) becomes a sum of products of covariances, and (11) has to be replaced by

$$r! [(r/2)! 2^{r/2}]^{-1} a_n^{-2} \sum_{i,k=1}^n \text{cov}(y_{n,i}, y_{n,k}).$$

REMARK. Clearly, there is no difficulty in extending the preceding arguments to the case of vector variables; an appropriate form of the Second Limit Theorem for multivariate distributions is given in [9].

ACKNOWLEDGMENTS. The author wishes to express his great indebtedness to Mr. J. D. NORTH, Chairman and Managing Director of Boulton Paul Aircraft, Ltd., for encouraging probabilistic research in the Mathematical Services Department of the firm, and for allowing its results to be published. Sincere thanks are also due to Z. A. LOMNICKI for discussing the whole problem in a way which was most useful to the present author.

References

- [1] CRAMÉR, H.: *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press 1946. — [2] DIANANDA, P. H.: Some probability limit theorems with statistical applications. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49**, 239–246 (1953). — [3] DIANANDA, P. H.: The central limit theorem for m -dependent variables asymptotically stationary to second order. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **50**, 287–292 (1954). — [4] FELLER, W.: Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Z.* **40**, 521–559 (1935). — [5] FRÉCHET, M., and J. SHOAT: A proof of the generalized second limit theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.* **33**, 533–543 (1931). — [6] Hoeffding, W., and H. ROBBINS: The central limit theorem for dependent variables. *Duke Math. J.* **15**, 773–780 (1948). — [7] KALLIANPUR, G.: On a limit theorem for dependent random variables (Russian). *Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. (N. S.)* **101**, 13–16 (1955). — [8] KAWATA, T.: On the central limit theorem and the moment generating function. *Rep. Statist. Appl. Res. Un. Jap. Sci. Engrs.* **1**, 6–21 (1951). — [9] LOMNICKI, Z. A., and S. K. ZAREMBA: On some moments and distributions occurring in the theory of linear stochastic processes I. *Monatsh. Math.* **61**, 318–358 (1957). — [10] MARSAGLIA, G.: Iterated limits and the central limit theorem for dependent variables. *Proc. Amer. Math. Soc.* **5**, 987–991 (1954).

Boulton Paul Aircraft, Ltd., Wolverhampton, England

(Eingegangen am 3. Januar 1958)

In der Bundesforschungsanstalt für Viruskrankheiten der Tiere in Tübingen a.N. ist die Stelle eines

Mathematikers

sofort zu besetzen.

Vergütungsgruppe: III TO, A

Probezeit: 6 Monate, danach Dienstvertrag zunächst für 2 Jahre.

Aufgabengebiet: Unterstützung der biologischen Laboratorien bei biometrischen Messungen, insbesondere bei der statistischen Erfassung der Wirkung von Seuchenerregern, Impfstoffen, Erbfaktoren usw.; Beratung des physikalischen und der chemischen Labors in mathematischen Fragen; eigene Forschungsarbeiten auf statistisch-biometrischem und mathematisch-biophysikalischem Gebiet.

Schwerbeschädigte bzw. 131er werden bei gleicher Eignung bevorzugt, Bein- und Armapputierte kommen jedoch nicht in Frage.

Bewerbungen mit ausführlichem Lebenslauf, Zeugnisabschriften und gegebenenfalls Angabe der bisherigen Veröffentlichungen sind an den Präsidenten der Anstalt zu richten.

Dienstantritt jederzeit möglich. Persönliche Vorstellung nur nach Aufforderung.

Vom Ursprung und Ende der Metaphysik

Eine Studie zur Weltanschauungskritik

Von Ernst Topitsch

Professor an der Universität Wien

IV, 320 Seiten Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen DM 26.—

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. — Die Grundformen des Denkens im Mythos. — Entfaltung und Verfall der Hochmythologie. — Der Kosmos der Philosophie. — Tradition, Ideologie und Wissenschaft. — Ergebnisse und Folgerungen. — Literatur- und Namenverzeichnis.

In diesem Buche entwickelt der Verfasser Gedankengänge, die mit fast herausfordernder Kühnheit von den herkömmlichen Ansichten abweichen. Von verwandten Untersuchungen unterscheidet es sich dadurch, daß es sich nicht auf eine Analyse der traditionellen philosophischen Systeme beschränkt, sondern zu ursprünglicheren Formen der Weltauffassung vorzudringen sucht, die bereits im Denken der alten Hochkulturen Ägyptens, Mesopotamiens und Chinas voll ausgebildet sind und wahrscheinlich bis tief in die Vorgeschichte zurückreichen. Dieses mythische Weltbild ist in den elementaren Vorgängen der gesellschaftlichen Produktion und Reproduktion des Lebens verwurzelt, nach deren Analogie der Kosmos als Lebewesen, Sozialgebilde oder Artefakt gedeutet wird; umgekehrt werden die menschlichen Verhältnisse dem so geschaffenen Bild des Universums untergeordnet. Wenn die Astrologie die Sterne zu Herrschern macht, die über die irdischen Verhältnisse Gewalt haben, wenn für das Gottesgnadentum der König ein Beauftragter des Himmels herrn ist und die Architektur die Kathedrale als Abbild der Himmelsstadt auffaßt, so sind alle diese bis tief in die europäische Neuzeit wirksamen Motive nur Nachklänge jener altorientalischen Hochmythologie. Die antike und mittelalterliche Philosophie ist in diese Weltauffassung eingebettet geblieben, ja sie ist in vieler Hinsicht nur deren rationalisierte und verblaßte Nebenform. Dies wird in eindringenden Analysen der Vorsokratiker und der platonisch-aristotelischen sowie der stoischen und der neuplatonischen Tradition aufgezeigt, wobei die Probleme des Naturrechtes, der Theodizee, der Willensfreiheit und der analogia entis besondere Berücksichtigung erfahren. Nur langsam löst sich die Neuzeit von jenen Denkformen, die noch in der Aufklärung und im Marxismus machtvoll weiterwirken. Erst heute sind wir dank der Fortschritte der Wissenschaftstheorie und Kultursociologie imstande, den Aufbau derartiger vorwissenschaftlicher Weltbilder völlig zu durchschauen und die Grenzen ihrer Geltung und Leistungsfähigkeit abzustecken.

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Ergebnisse der angewandten Mathematik

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik“ herausgegeben von L. Collatz und F. Lösch.

Im Februar 1958 erschien:

5. Heft:

Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen

Von Dr. Ekkehart Kröner. Mit 39 Abbildungen. VII, 179 Seiten Gr.-8°. 1958.

Steif geheftet DM 32.—

Die Versetzung hat als Träger der plastischen Verformung und als elementare Eigenspannungsquelle in den letzten Jahren größtes Interesse gewonnen. Im Gegensatz zu den bisherigen zusammenfassenden Darstellungen, die einen atomistischen Standpunkt beziehen, wird hier die Stellung der Versetzung in der Kontinuumsmechanik besprochen, in der sie eine Rolle spielt, die in vieler Hinsicht derjenigen des Stromes in der Elektrodynamik analog ist. Der Leser wird in die neuen Begriffe eingeführt. Der plastische und elastische Anteil der gesamten Verformung werden beide durch asymmetrische Tensordfelder beschrieben, deren Rotation die Versetzungsdichte ist. Letzteres bedingt im allgemeinen die Nichterfüllung der Kompatibilitätsbedingungen bei de St. Venant, bei Anwesenheit von Versetzungen. Die spezifischen Hilfsmittel von Eigenspannungszuständen sind der Inkompabilitätstensor und der Spannungsfunktionstensor. Die hiermit arbeitende neue Theorie der Eigenspannungsbestimmung wird konsequent dargestellt. Die Kontinuumstheorie wird auf die realen Kristalle angewandt. Die punktförmigen Gitterfehlstellen werden als elastische Singularitäten behandelt, für deren Wechselwirkung mit den elastischen Feldern im Kristall sehr weitreichende, einfache Formeln gelten. Ferner wird die nicht-Riemannsche Geometrie der Versetzung von Kondo und Bilby und Mitarbeitern kurz dargestellt, die eine schöne Anwendung des Cartanschen Begriffes der Torsion auf den realen Körper ist.

Die bisher erschienenen Hefte dieser Reihe:

1. Heft:

Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen

Von H. Bückner, Berlin. Mit 1 Textabbildung. VI, 127 Seiten Gr.-8°. 1952.

Vergriffen

2. Heft:

Die konfluente hypergeometrische Funktion

Mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Von H. Buchholz, apl. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt, wissenschaftlicher Mitarbeiter und Referent beim Fernmeldetechnischen Zentralamt der Deutschen Bundespost. Mit 9 Textabbildungen. XVI, 234 Seiten Gr.-8°. 1953.

Steif geheftet DM 36.—

3. Heft:

Dreidimensionale Überschallprobleme der Gasdynamik

Von Dr. Karl-Richard Dorfner, München. Mit 44 Abbildungen. VII, 150 Seiten Gr.-8°. 1957.

Steif geheftet DM 26.—

4. Heft:

Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen

Von Dr. Walter Franz, apl. Professor der theoretischen Physik an der Universität Münster i. Westf. Mit 29 Abbildungen. IV, 123 Seiten Gr.-8°. 1957.

Steif geheftet DM 21.60

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik“ erhalten die „Ergebnisse der angewandten Mathematik“ zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG